πολ. γεωργιακακης
μαν. γεωργιακακης

ΑΛΓΕΒΡΑ 6

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

θεωρια
ασκησεις

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ
1985

ΤΕΥΧΟΣ Γ΄

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΑΡΚΑΔΙ"
Μαυροκορδάτου 3 τηλ. 36.36.063
10678 - ΑΘΗΝΑ

πολ. γεωργιακακης
μαν. γεωργιακακης

ΑΛΓΕΒΡΑ 6

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

θεωρια
ασκησεις

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1985

ΤΕΥΧΟΣ Γ'

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΑΡΚΑΔΙ"
Μαυροκορδάτου 3 τηλ. 36.36.063
10678 . ΑΘΗΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με το βιβλίο αυτό "Αλγεβρα 6, Τεύχος Γ'" ολοκληρώνεται το κεφάλαιο της ανάλυσης και συμπληρώνεται με θεωρία και ασκήσεις που καλύπτουν τα απαραίτητα στοιχεία γνώσεως πάνω στα κεφάλαια της Παραγώγου και του Ολοκληρώματος.

Η θεωρία αναπτύσσεται με απλό τρόπο, γίνεται απόδειξη όλων των βασικών προτάσεων και θεωρημάτων και ακολουθούν απλά παραδείγματα.

Μετά από κάθε παράγραφο ακολουθεί μεθοδολογία που συνοδεύεται μεθοδικά από λυμένα θέματα παρμένα από την Ελληνική και ξένη βιβλιογραφία, ακολουθούν πολλά άλυτα θέματα για εξάσκηση.

Το βιβλίο αυτό συμπλήρωμα των δύο άλλων που προηγούνται αποτελεί σημαντικό βοήθημα τόσο των μαθητών - υποψήφιων ανωτάτων σχολών όσο και των καθηγητών.

Σκοπός μας είναι να εφοδιάσουμε με τα απαραίτητα στοιχεία πάνω στη συγκεκριμένη ύλη διδασκόμενους και διδάσκοντες και η επιτυχία αυτού μας του σκοπού, θα αποτελέσει μεγάλη ικανοποίηση και αμοιβή των κόπων και των θυσιών μας.

Οι συγγραφείς

Μ. Γεωργιακάκης

Π. Γεωργιακάκης

Σεπτέμβριος 1985

κεφαλαιο 5

παραγωγοι

5.1. Λόγος μεταβολής μιας συνάρτησης f.

Η θέση ενός κινητού A πάνω στον άξονα x΄x αρχής O καθορίζεται συνήθως από μια συνάρτηση S η οποία σε κάθε χρονική στιγμή t αντιστοιχίζει
την τετμημένη του A $x = S(t)$.



Το διάστημα που διανύει το κινητό μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t είναι $S(t)-S(t_0)$.

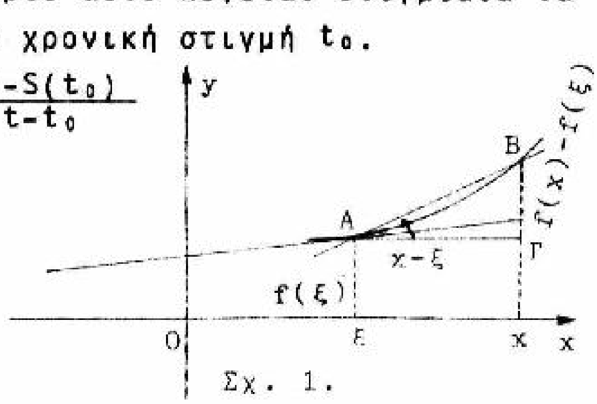
Το πηλίκο των διαφορών κατά την χρονική στιγμή t_0 είναι $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ που κατά τα γνωστά από την φυσική είναι η **μέση ταχύτητα** U_μ του κινητού κατά τον χρόνο $t-t_0$.

Δηλ.: Μέση ταχύτητα $U_\mu(t) = \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ και ονομάζεται λόγος μεταβολής της συνάρτησης S μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{t\to t_0} U_\mu(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε το όριο αυτό λέγεται στιγμιαία ταχύτητα του κινητού A κατά την χρονική στιγμή t_0.

Δηλ.: $U = \lim\limits_{t\to t_0} U_\mu(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$

Έστω ακόμη μια συνεχής συνάρτηση f σ΄ένα σημείο ξ του πεδίου ορισμού της $\mathcal{D}(f)$, και A το σημείο του διαγράμματος G με τετμημένη ξ και B



Σχ. 1.

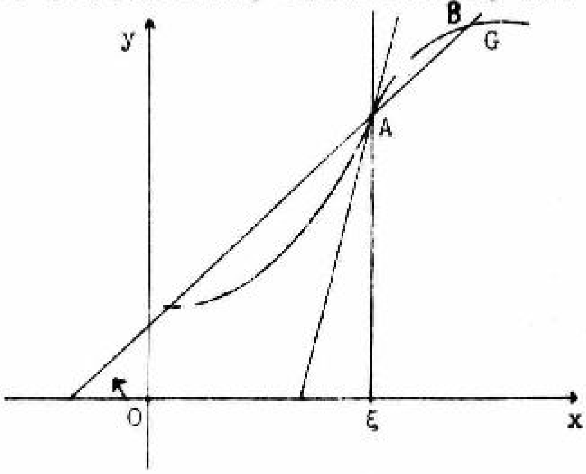
ένα άλλο σημείο της G με τετμημένη x. Τότε η ευθεία AB έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$.

Δηλ.: το **λόγο μεταβολής** της f μεταξύ του x και ξ.

Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}\lambda(x) = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και είναι **πεπερασμένος πραγματικός** αριθμός δηλ. $\lim_{x\to\xi}\lambda(x) = 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: $|x-\xi| < \delta \Rightarrow |\lambda(x)-1| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι οι τιμές του λ(x) συσσωρεύονται στη περιοχή (1-ε, 1+ε) και μάλιστα πολύ κοντά στο 1 αρκεί να πάρουμε το x πολύ κοντά στο ξ. Επομένως για σημεία B της G που είναι πολύ κοντά στο A ο συντελεστής διευθύνσεως της AB είναι 1, που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διευθύνσεως 1.

Η εξίσωση της ευθείας αυτής είναι: $\mathbf{y-f(\xi) = 1(x-\xi)}$ (1) και ονομάζεται **εφαπτομένη της G στο σημείο A.**

Αν $\lim_{x\to\xi}\lambda(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε οι συντελεστές διευθύνσεως των ευθειών AB για σημεία B γειτονικά του A δεν συσσωρεύονται γύρω από κάποιο πραγματικό αριθμό αλλά για κάθε σημείο A της G υπάρχει άλλο B στο οποίο αντιστοιχεί συντελεστής διευθύνσεως μεγαλύτερος κατ'απόλυτη τιμή (σχήμα 2).



Σχ. 2

Δηλαδή από την (1) έχουμε $x-\xi = \frac{y-f(\xi)}{\lambda(x)}$ και επειδή

$\lim_{x\to\xi}\lambda(x) = +\infty$ ή $-\infty \Rightarrow \lim_{x\to\xi}\frac{1}{\lambda(x)} = 0$ οπότε είναι $x-\xi = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \mathbf{\xi}$ που σημαίνει ότι η οριακή θέση της τέμνουσας AB είναι η ευθεία $x = \mathbf{\xi}$, που είναι εφαπτομένη της G στο σημείο A με τετμημένη ξ παράλληλη με τον άξονα y'y.

5.2. Έννοια της παραγώγου.

Ορισμός. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το ανοιχτό διάστημε $\Delta = (\alpha,\beta)$ θα λέμε, ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi \in \Delta$

όπου ξ **εσωτερικό σημείο** του Δ τότε και μόνο τότε όταν ο λόγος μεταβολής $\lambda(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ έχει πεπερασμένο όριο στο ξ.

Το όριο αυτό λέγεται **παράγωγος αριθμός** της f στο x_0 ή η πρώτη παράγωγος της f στη θέση x = ξ και συμβολίζεται:

$$\lim_{x \to \xi} \lambda(x) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

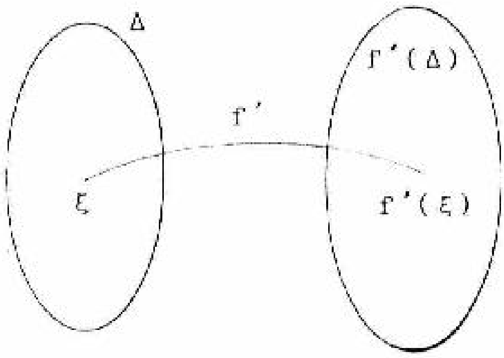
Αν στον τύπο (1) θέσουμε x-ξ = h με h → 0 και x = ξ+h τότε η (1) γίνεται:

$$\lim_{h \to 0} \lambda(\xi+h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = f'(\xi) \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Αν το $\lim_{x \to \xi} \lambda(x)$ υπάρχει για κάθε ξ ∈ Δ τότε λέμε ότι η f παραγωγίζεται σε ολόκληρο το Δ.

Οπότε σε κάθε ξ ∈ Δ αντιστοιχίζεται δια μέσου της f′ ένα μόνο στοιχείο f′(ξ) του f′(Δ) τελείως ορισμένο που είναι ο παράγωγος αριθμός f′(ξ) στη θέση ξ ∈ Δ.

Ορίζεται επομένως μια συνάρτηση f′: Δ → f′(Δ) με τύπο y′ = f′(x) και την ονομάζουμε **συνάρτηση πρώτης παραγώγου** της f στο Δ ή ποιό απλά παράγωγος της f στο Δ



Σχ. 3.

Παρατηρήσεις.

1. Η παράγωγος της f στη θέση x = ξ ∈ Δ είναι πάντοτε ένας πραγματικός αριθμός (εφ᾽όσον υπάρχει το όριο) και ουδέποτε μια συνάρτηση.

2. Όταν λέμε ότι η f **είναι παραγωγίσιμη** στο ξ ∈ Δ εννοούμε ότι υπάρχει το όριο του λόγου μεταβολής στο ξ και είναι πεπερασμένος αριθμός.

3. Όταν λέμε ότι η f **έχει παράγωγο** στο ξ ∈ Δ εννοούμε πως υπάρχει το όριο του λόγου μεταβολής στο ξ και είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός ή το +∞ ή το -∞.

4. Για να έχει νόημα η έκφραση (η παράγωγος της f στη θέση x = ξ ∈ Δ) θα πρέπει το σημείο ξ να ανήκει στο Δ και να είναι

σημείο συσσωρεύσεως του Δ. Επομένως στα μεμωνομένα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης η παράγωγος δεν ορίζεται, αν και η συνάρτηση είναι συνεχής.

5. Επειδή $\lim_{x\to\xi}\lambda(x) = f'(\xi)$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ πάνω στην γραφική παράσταση της f είναι:
$y-f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$.
Η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$S'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

6. Η έννοια παράγωγος της f στη θέση $x = \xi \in \Delta$ είναι ο αριθμός $f'(\xi) \in \mathbb{R}$ και όχι μια συνάρτηση που είναι η παράγωγος της f.

7. Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ'ένα σύνολο,όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2+2$.
Να εξετάσετε αν έχει παράγωγο στη θέση $\xi = 2$.

Λύση: Ο λόγος μεταβολής της f στη θέση $\xi = 2$ είναι

$$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{3x^2+2-3\cdot 2^2-2}{x-2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} = 3(x+2)$$

$\forall\, x \neq 2$ και $\lim_{x\to 2}\lambda(x) = f'(2) = 3\lim_{x\to 2}(x+2) = 12$.

Άρα ο παράγωγος αριθμός της f στη θέση $\xi = 2$ είναι $f'(2) = 12$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+x+1$.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε:

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{x^2+x+1-\xi^2-\xi-1}{x-\xi} =$$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{(x-\xi)(x+\xi)+(x-\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}(x+\xi+1) = 2\xi+1.$$

Επειδή δε το ξ είναι τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}$ η f έχει παράγωγο συνάρτηση f' με $f'(x) = 2x+1$.

3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Να εξετάσετε αν έχει παράγωγο στη θέση $x_0 = 0$.

Λύση: Ο λόγος μεταβολής της f στη θέση $x_0 = 0$ είναι

$$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x} = \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0}\lambda(x) = \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty .$$

Άρα η f έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$ και είναι $+\infty$. Δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

Να εξετάσετε αν έχει παράγωγο στη θέση ξ = 1.

Λύση: Ο λόγος μεταβολής της f στη θέση ξ = 1 έιναι

$$\lambda(\xi+h) = \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \frac{\frac{\xi+h+1}{\xi+h+2} - \frac{\xi+1}{\xi+2}}{h} = \frac{h}{(\xi+h+2)(\xi+2)h} =$$

$$= \frac{1}{(\xi+h+2)(\xi+2)} \text{ και } \lim_{h\to 0}\lambda(\xi+h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\xi+h+2)(\xi+2)} = \frac{1}{(\xi+2)^2}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στη θέση ξ = 1 και έχει παράγωγο αριθμό $f'(1) = \frac{1}{9}$.

5.3. Πλευρικές παράγωγοι της f.

Ορισμός. Εάν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = (\alpha,\xi]$ και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi^-}\lambda(x) = \lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lambda\in\mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη από αριστερά στη θέση $x = \xi\in\Delta$ και τον παράγωγο αριθμό τον συμβολίζουμε με $f'(\xi^-)$ ή $f'_\alpha(\xi)$.

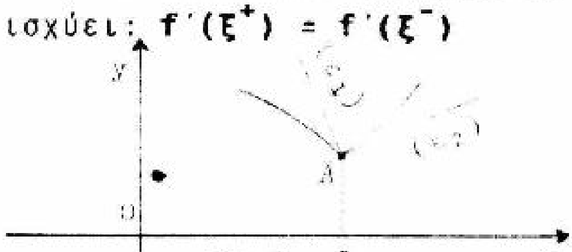
Ορισμός. Εάν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = [\xi,\beta)$ και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi^+}\lambda(x) = \lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lambda\in\mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη από δεξιά στη θέση $x = \xi\in\Delta$ και τον παράγωγο αριθμό τον συμβολίζουμε με $f'(\xi^+)$ ή $f'_\delta(\xi)$.

Επομένως μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ του πεδίου ορισμού της, τότε και μόνο τότε όταν υπάρχουν οι αριθμοί $f'(\xi^+)$ και $f'(\xi^-)$ και ισχύει: $\mathbf{f'(\xi^+) = f'(\xi^-)}$

Οι ημιευθείες (ε_1) και (ε_2) (σχήμα 4) με εξισώσεις

$y-f(\xi) = f'(\xi^-)(x-\xi)$ (ε_1)

$y-f(\xi) = f'(\xi^+)(x-\xi)$ (ε_2)



Σχ. 4

ονομάζονται αντίστοιχα ημιεφαπτόμενες από αριστερά ή από δεξιά της γραφικής παράστασης G της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$.

Παρατηρήσεις

1. Αν $f'(\xi^+) = +\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα $f'(\xi^-) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη δεξιά αντίστοιχα αριστερά στη θέση $x = \xi \in \Delta$.

2. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι $\Delta = [\alpha,\beta]$ τότε θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε και μόνο τότε όταν
i) Υπάρχει η παράγωγος της f σε κάθε σημείο του (α,β)
ii) Υπάρχει η δεξιά παράγωγος $f'(\alpha^+)$ της f στη θέση $x = \alpha$
iii). Υπάρχει η αριστερή παράγωγος $f'(\beta^-)$ της f στη θέση $x = \beta$

3. Εάν το πεδίο ορισμού της f είναι $(\alpha,\xi] \cup (\xi,\beta)$ και υπάρχουν οι αριθμοί $f'(\xi^+)$ και $f'(\xi^-)$ και είναι $f'(\xi^+) \neq f'(\xi^-)$ τότε λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x = \xi \in \Delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = |x+3|$ και $g(x) = e^{-|x|+1}$

Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στις θέσεις $x_0 = -3$ και $\xi = 0$ αντίστοιχα.

Λύση: Η f γράφεται με πολλαπλό τύπο και είναι

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq -3 \\ -x-3, & x < -3 \end{cases}$$

με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f) = (-\infty,-3) \cup [-3,+\infty)$.

Για να είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = -3$ πρέπει οι πλευρικές παράγωγοι στο σημείο -3 να είναι ίσες.

Είναι $f'(-3^+) = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x+3+3-3}{x+3} = 1$

και $f'(-3^-) = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{-x-3+3-3}{x+3} = -1$

και επειδή $f'(-3^+) \neq f'(-3^-)$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = -3$.

Όμοια η g γράφεται: $g(x) = \begin{cases} e^{-x+1}, & x \geq 0 \\ e^{x+1}, & x < 0 \end{cases}$

και έχει $\mathcal{D}(g) = (-\infty,0) \cup [0,+\infty)$.

Για να είναι παραγωγίσιμη στη θέση $\xi = 0$ πρέπει οι πλευρικές παράγωγοι στο σημείο $\xi = 0$ να είναι ίσες.

Είναι $g'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-x+1} - e}{x-0} = e\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = e\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{e^x x} =$

$= -e\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = -e$

και $g'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{x+1}-e}{x} = e\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = e$

Επειδή δε είναι $g'(0^+) \neq g'(0^-)$ η g δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $\xi = 0$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3\pi|x|}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 0$.

Λύση: Η f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3\pi x}{x^2}, & x > 0 \\ -\frac{\eta\mu^3\pi x}{x^2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{με} \quad \mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \cup \{0\}$$

και είναι $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\eta\mu^3\pi x}{x^2} - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu^3\pi x}{x^3\pi^3}\pi^3 =$

$= \pi^3 \lim\limits_{x\to 0^+} \left[\frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x}\right]^3 = \pi^3$ και $f'(0^-) = -\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{\eta\mu^3(\pi x)}{x^2}}{x} =$

$= -\pi^3 \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{\eta\mu\pi x}{\pi x}\right)^3 = -\pi^3.$

Επειδή δε $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 0$.

3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -\sqrt{x+2}$.

Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = -2$.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = [-2, +\infty)$ επομένως θα βρούμε την παράγωγο της f δεξιά του -2.

Είναι: $f'(-2^+) = \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{-\sqrt{x+2}-0}{x+2} =$

$= -\lim\limits_{x\to -2^+} \sqrt{\frac{x+2}{(x+2)^2}} = -\lim\limits_{x\to -2^+} \sqrt{\frac{1}{x+2}} = -\infty.$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = -2$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{αν } x > 1 \\ x^2 & \text{αν } 0 < x \le 1 \end{cases}$

Να βρείτε το ευρύτερο σύνολο στο οποίο η f παραγωγίζεται.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = (0,1] \cup (1,+\infty)$.
Στο διάστημα (0,1) η f έχει παράγωγο και είναι αν $\xi \in (0,1)$

$f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \frac{x^2-\xi^2}{x-\xi} = \lim\limits_{x\to\xi}(x+\xi) = 2\xi$ και επειδή το ξ είναι τυχαίο σημείο του (0,1) η παράγωγος συνάρτηση f′ της f είναι $f'(x) = 2x$.

Όμοια στο διάστημα $(1,+\infty)$ η f έχει παράγωγο και είναι αν

$x_0 \in (1,+\infty)$ $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}(x_0^2+xx_0+x_0^2) = 3x_0^2$

και επειδή το x_0 είναι τυχαίο η παράγωγος συνάρτηση f′ είναι $f'(x) = 3x^2$.

Μένει να δούμε στη θέση ξ = 1 αν η f είναι παραγωγίσιμη.

Είναι $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x+1) = 3$

και $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2$

Επειδή δε $f'(1^+) \neq f'(1^-)$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση ξ = 1. Άρα το ευρύτερο σύνολο στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη είναι το $(0,1) \cup (1,+\infty) = A$.
Ισχύει δε $A \subset \mathcal{D}(f)$.

5.4. Διαδοχικές παράγωγοι.

Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος f′ μιας συνάρτησης f είναι μια νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f')$.

Αν και της συνάρτησης f′ η παράγωγος είναι μια νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathcal{D}(f'')$ η συνάρτηση αυτή λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται f″.

Όμοια η παράγωγος της f″ αν υπάρχει λέγεται **τρίτη παράγωγος της f** και συμβολίζεται f‴ κ.ο.κ.

Γενικά με $\nu \ge 2$ η παράγωγος συνάρτηση της ν-1 παραγώγου της f αν υπάρχει λέγεται **νιοστή παράγωγος της f** και συμβολίζεται $f^{(\nu)}$.

Ορισμός. Μια συνάρτηση f θα λέγεται ν φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στη θέση $x = \xi \in \pi(\xi)$ όταν η f είναι ν φορές παραγωγί-

σιμη και η συνάρτηση $y = f^{(\nu)}(x)$ είναι συνεχής στη θέση $x = \xi \in \pi(\xi)$.

Αν η f έχει παράγωγο κάθε τάξης στο σημείο $\xi \in \pi(\xi)$ τότε λέμε ότι παραγωγίζεται άπειρες φορές.

Παρατηρήσεις

1. Η ν-οστή παράγωγος της f στη θέση $x = \xi \in \Delta$ δίνεται από την ισότητα $f^{(\nu)}(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f^{(\nu-1)}(x) - f^{(\nu-1)}(\xi)}{x-\xi}$

2. Για να υπάρχει η $f^{(\nu)}(\xi)$ δεν αρκεί να υπάρχει η $f^{(\nu)}$ (ξ) της f στη θέση $x = \xi$ αλλά πρέπει η συνάρτηση $f^{(\nu-1)}(\xi)$ να είναι ορισμένη σε μια περιοχή του ξ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4+2$.
Να βρείτε την $f^{(4)}(x)$ παράγωγό της.

Λύση: Η f έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και αν $\xi \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{x^4+2-\xi^4-2}{x-\xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{x^4-\xi^4}{x-\xi} = \lim_{x \to \xi}(x^3+x^2\xi+x\xi^2+\xi^3) = 4\xi^3$$

και επειδή το ξ είναι τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 4x^3$.

Η f' έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και αν $\xi \in \mathbb{R}$ είναι

$$f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{4x^3-4\xi^3}{x-\xi} = \lim_{x \to \xi} 4(x^2+x\xi+\xi^2) =$$

$= 12\xi^2$ και επειδή $\xi \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) = 12x^2$.

Όμοια η f'' έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και αν $\xi \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f''(x)-f''(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{12x^2-12\xi^2}{x-\xi} = \lim_{x \to \xi} 12(x+\xi) =$$

$= 24\xi \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}$ οπότε $f'''(x) = 24x$.

Η f''' έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και με $\xi \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^{(4)}(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f^{(3)}(x)-f^{(3)}(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{24x-24\xi}{x-\xi} = 24 \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}$$

Άρα $f^{(4)}(x) = 24$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2|x|$.
Να βρεθούν οι παράγωγοι αριθμοί $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

Λύση: Η f γράφεται: $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$

Και έχει παράγωγο συνάρτηση την

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

Είναι δε $f'(0) = 0$.

Όμοια η f' παραγωγίζεται σε όλο το πεδίο ορισμού της και έχει παράγωγο συνάρτηση την

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & x \geq 0 \\ -6x, & x < 0 \end{cases}$$

Είναι δε $f''(0) = 0$ γιατί $f''(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3x^2-0}{x} = 0$ και $f''(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-3x^2-0}{x} =$
$= 0$.

Επίσης η f'' παραγωγίζεται στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \subset \mathcal{D}(f'')$ και έχει παράγωγο συνάρτηση την

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, & x > 0 \\ -6, & x < 0 \end{cases}$$

Δεν έχει παράγωγο στο σημείο 0 γιατί είναι

$$f'''(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)-f''(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x-0}{x} = 6$$

και $f'''(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f''(x)-f''(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-6x-0}{x} = -6$

Άρα δεν υπάρχει ο $f'''(0)$.

5.5. Παράγωγος και συνέχεια.

Θεώρημα. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο ξ, σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$, τότε η f είναι συνεχής σ' αυτό. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε είναι

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Επίσης είναι: $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)] = \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x-\xi) =$

$= \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \lim\limits_{x\to\xi}(x-\xi) = f'(\xi)\cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο ξ.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γιατί ως γνωστό η συνάρτηση g με $g(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0 γιατί είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) =$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0 = g(0)$.

Δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο 0 γιατί είναι:

$g'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$ και

$g'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = -1$

Άρα $g'(0^+) \neq g'(0^-)$ και η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

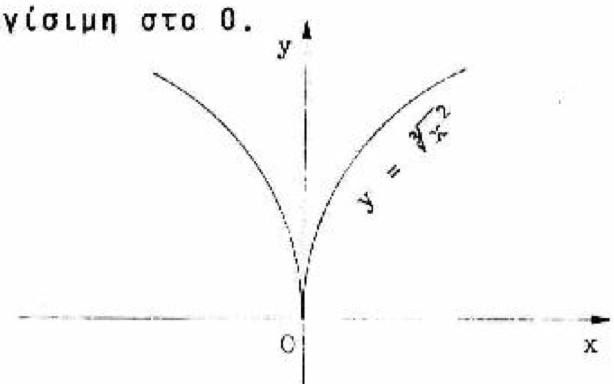
1. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ ενώ είναι συνεχής σ'αυτό.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο 0 γιατί είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} x^2} = 0 = f(0)$. Η παράγωγος της f στο 0 είναι

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = +\infty$

ή $-\infty$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Είναι δε $f'(0^+) = +\infty$ και $f'(0^-) = -\infty$. Επομένως στο διάγραμμα της f και στο σημείο $(0,f(0))$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $x = 0$ δηλαδή είναι ο άξονας Oy. (Σχήμα 5)



Σχ. 5.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x \geq 0 \\ x^2-2x, & x < 0 \end{cases}$

Δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ = 0 του R.

Λύση: Η f με τύπο $f(x) = x^2+2x$ με $x \geq 0$ είναι συνεχής σαν πολυωνυμική και όμοια η f με τύπο $f(x) = x^2-2x$ και $x < 0$ είναι συνεχής μένει να δούμε αν είναι συνεχής στο 0.

Είναι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+2x) = 0 = f(0)$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2-2x) = 0 = f(0)$.

Άρα η f είναι συνεχής και στο 0. Οι πλευρικές παράγωγοι της f στο 0 είναι

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}(x+2) = 2$ και

$f'(0^-) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x^2-2x-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-}(x-2) = -2$

και επειδή $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 1 \\ \frac{x^2+\lambda x-1}{x+1}, & x > 1 \end{cases}$

Να προσδιορίσεται το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi = 1$.

Λύση: Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στη θέση ξ = 1 ισχύει $f'(1^+) = f'(1^-)$ (1) και με βάση γνωστό θεώρημα είναι και συνεχής στη θέση ξ = 1 δηλαδή $\lim\limits_{x\to1^+}f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}f(x) = f(1)$ (2)

$$H\ (1) \Leftrightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x^2+\lambda x-1}{x+1}-2}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\lambda x-1-2x-2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \Leftrightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+(\lambda-2)x-3}{(x-1)(x+1)} =$$

$= 2$ (3)

$$H\ (2) \Leftrightarrow \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^2+\lambda x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to1^-}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} = 2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \lambda = 4$ (4).

Η (3) με βάση την (4) γίνεται: $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x+1)} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+3}{x+1} = 2$ (που είναι αληθινό)

Άρα με λ = 4 η f είναι παραγωγίσιμη στη θέση ξ = 1 και η παράγωγος της είναι $f'(1) = 2$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = |\ln x|$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στη θέση ξ = 1.

Λύση: Η f γράφεται:

$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \ln x \ge 0 \\ -\ln x, & \ln x < 0 \end{cases}$ ή $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \ge 1 \\ -\ln x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

και είναι συνεχής στη θέση ξ = 1 γιατί είναι

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\ln x = \ln(\lim\limits_{x\to1^+}x) = \ln1 = 0 = f(1)$ και

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(-\ln x) = -\ln(\lim\limits_{x\to1^-}x) = -\ln1 = 0$

Δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση x = 1 γιατί είναι:

$f'(1^+) = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x-\ln1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1} = 1$ γιατί $(1-\frac{1}{x} \le \ln x \le x-1)$

και $f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\ln x - \ln 1}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = -1$ δηλαδή

$f'(1^+) \neq f'(1^-)$

Άρα η f είναι συνεχής στη θέση ξ = 1 και όχι παραγωγίσιμη

5.6. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων.

1. Παράγωγος σταθερής συνάρτησης.

Εάν $f(x) = c$ και $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ τότε έχουμε με $\xi \in \mathbb{R}$:

$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \Rightarrow \lim_{x\to\xi}\lambda(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{c-c}{x-\xi} = 0 =$

$= f'(\xi)\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}$. Άρα η σταθερή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $\mathbf{f'(x) = (c)' = 0}$.

2. Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης με f(x) = x.

Έστω $\xi \in \mathbb{R}$, τότε ο λόγος μεταβολής είναι:

$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\lim_{x\to\xi}\lambda(x) = f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{x-\xi}{x-\xi} = 1$ και επειδή το ξ είναι τυχαίο στοιχείο του $\mathbb{R}$ η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $\mathbf{f'(x) = (x)' = 1}$.

3. Η παράγωγος της μονωνύμου συνάρτησης $f(x) = x^\nu$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$

Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Έστω $\xi \in \mathcal{D}(f)$ με ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$. Η παράγωγος της f στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ είναι:

$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{x^\nu-\xi^\nu}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\xi+\ldots+$
$+\xi^{\nu-1}) = \xi^{\nu-1}+\xi^{\nu-1}+\ldots+\xi^{\nu-1} = \nu\xi^{\nu-1}$ και αυτό $\forall\ \xi \in \mathcal{D}(f)$.

Ώστε η συνάρτηση πρώτης παραγώγου μιας μονωνύμου συνάρτησης $f(x) = x^\nu/\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι $\mathbf{(x^\nu)' = f'(x) = \nu x^{\nu-1}\ \forall\ x \in \mathbb{R}}$.

4. Γενικώτερα $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$ και ισχύει: $\mathbf{f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\ \forall\ x \in \mathbb{R}}$ εκτός εάν $x = 0$ και $\alpha \in (0,1)$.

5. Να βρεθεί η παράγωγος συνάρτηση της **f** με: $f(x) = \sqrt{x}$.

Προφανώς $\mathcal{D}(f) = [0,+\infty)$. Θεωρούμε τυχόν σημείο $x = \xi \in (0,+\infty)$ και αναζητούμε το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$.

'Εχουμε: $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\xi}}{x-\xi}=\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}}=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=f'(\xi)$

'Αρα η παράγωγος της f στο τυχαίο σημείο $\xi\in(0,+\infty)$ υπάρχει και είναι: $f'(\xi)=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}\ \forall\ \xi\in(0,+\infty)$. 'Ωστε η συνάρτηση παράγωγος της f είναι η: $(\sqrt{x})'=f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ \forall\ x\in(0,+\infty)$

Ας αναζητήσουμε τώρα αν υπάρχει η παράγωγος της f και στην θέση x = 0.

Προς τούτο αναζητούμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, που επειδή $\mathcal{D}(f)=[0,+\infty)$ ταυτίζεται, ως γνωστό, με το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. (Παρατ. 6)

'Εχουμε: $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

'Αρα η παράγωγος της f στην θέση x = 0 δεν υπάρχει, αλλά απειρίζεται θετικά.

6. Να βρεθεί η παράγωγος της f με f(x) = ημx.

Προφανώς $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$. 'Εστω $\xi\in\mathcal{D}(f)$ και ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$. Εφαρμόζουμε τον τύπο (2) της παραγ. 5.2.

Θα έχουμε: $f'(\xi)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\eta\mu(\xi+h)-\eta\mu\xi}{h}=$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\eta\mu\frac{h}{2}\,\sigma\upsilon\nu(\xi+\frac{h}{2})}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to0}\sigma\upsilon\nu(\xi+\frac{h}{2})=$$

$=1.\sigma\upsilon\nu\xi=\sigma\upsilon\nu\xi$.

'Ωστε η συνάρτηση παράγωγος της f(x) = ημx είναι:

$f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

7. 'Ομοια βρίσκουμε ότι: **$f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.**

8. Να βρεθεί η παράγωγος της f με $f(x)=e^x$.

'Εχουμε: $f'(x)=(e^x)'=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^x(e^h-1)}{h}=$

$=e^x\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}$. Αλλά γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$, οπότε:

$f'(x)=(e^x)'=e^x\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

9. Να βρεθεί η παράγωγος της f με $f(x)=\alpha^x$, όπου $\alpha>0$.

'Εχουμε: $f'(x) = (a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$

Είναι όμως γνωστό ότι $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \ln a$ και επομένως:

$$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a \ \forall\ x \in \mathbb{R} \quad \text{και } a > 0$$

10. Να βρεθεί η παράγωγος της f με f(x) = lnx.

Προφανώς $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}^*_+$. 'Εχουμε $f'(x) = (\ln x)' =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}$$

$= \frac{1}{x}$ γιατί όπως ξέρουμε $\frac{\ln(1+\eta)}{\eta} \to 1$ αν $\eta \to 0$.

'Ωστε: $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \ \forall\ x \in \mathbb{R}^*_+$

5.7. Κανόνες παραγώγισης

Στην περίπτωση που ο τύπος μιας συνάρτησης είναι αρκετά σύνθετος, δεν είναι εύκολος ο υπολογισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης με την βοήθεια του ορισμού.

Μια σειρά από προτάσεις μας παρέχουν ορισμένους κανόνες με την βοήθεια των οποίων θα μπορούμε να υπολογίζουμε τις παραγώγους διαφόρων συναρτήσεων χωρίς να καταφεύγουμε στον ορισμό.

Οι κανόνες αυτοί πάρα πολύ απλοί και χρήσιμοι, μας διευκολύνουν πολύ στις διάφορες εφαρμογές και τις ασκήσεις.

1. Παράγωγος αθροίσματος και διαφοράς

Πρόταση: Εάν οι συναρτήσεις f_1 και f_2, με πεδία ορισμού $\mathscr{D}(f_1)$ και $\mathscr{D}(f_2)$ αντίστοιχα, έχουν παράγωγο στην θέση $x = \xi \in \mathscr{D}(f_1) \cap \mathscr{D}(f_2)$, τότε και οι συναρτήσεις $f_\Sigma = f_1+f_2$ και $f_\delta = f_1-f_2$ έχουν παράγωγο στη θέση $x = \xi \in \mathscr{D}(f_1) \cap \mathscr{D}(f_2)$.

Ισχύουν συνεπώς: $f'_\alpha = f'_1+f'_2$ και $f'_\delta = f'_1-f'_2$ εφ' όσον οι f_1 και f_2 παραγωγίζονται $\forall\ x \in \mathscr{D}(f_1) \cap \mathscr{D}(f_2)$.

Απόδειξη: Εξ υποθέσεως υπάρχουν οι παράγωγοι των f_1 και f_2 στη θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$. Αυτό σημαίνει, ότι υπάρχουν και τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\xi} \frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi}$$

Η παράγωγος της $f\alpha$ θα υπάρχει στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \cap \mathcal{D}(f_2)$, εφ' όσον υπάρχει και το:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f\alpha(x)-f\alpha(\xi)}{x-\xi}$$

Είναι όμως: $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f\alpha(x)-f\alpha(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x)+f_2(x)-f_1(\xi)-f_2(\xi)}{x-\xi} =$

$= \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi} + \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi} = f_1'(\xi)+f_2'(\xi)$.

Ώστε: $f\alpha'(\xi) = f_1'(\xi)+f_2'(\xi)$.

Επομένως αν αυτό συμβαίνει $\forall\ x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ θα ισχύει: $f\alpha'(x) = f_1'(x)+f_2'(x)$ (1). Όμοια δουλεύουμε και για την συνάρτηση $f\delta$.

Η (1) γενικεύεται με τις παραπάνω προϋποθέσεις και έχουμε: $f\alpha'(x) = f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_\nu'(x)/\nu \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(f_\nu)$.

Παρατήρηση:

Εάν η συνάρτηση f με $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$ έχει παράγωγο στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$, αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχουν και οι παράγωγοι των f_1 και f_2 στην θέση $x = \xi$. Επομένως αν υπάρχουν οι παράγωγοι των f_1 και f_2 στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$, τότε θα υπάρχει και η παράγωγος της f στην θέση $x = \xi$ όχι όμως και αντίστροφα.

Δηλαδή **ικανή συνθήκη** όχι όμως και αναγκαία για την ύπαρξη της παραγώγου της f στην θέση $x = \xi$ είναι να υπάρχουν οι παράγωγοι των f_1 και f_2 στην θέση $x = \xi$.

Το ίδιο ισχύει και για την f με $f(x) = f_1(x)-f_2(x)$.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με τύπους αντίστοιχα:

$$f_1(x) = \begin{cases} x-\sqrt{x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$ έχει τύπο $f(x) = x\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f(x) = x$ έχει παράγωγο στην θέση $x = 0 \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}$, ενώ η f_2 δεν έχει παράγωγο στην θέση $x = 0$

2. Παράγωγος γινομένου και πηλίκου.

Πρόταση:

Εάν οι συναρτήσεις f_1 και f_2, με πεδία ορισμού $\mathcal{D}(f_1)$ και $\mathcal{D}(f_2)$ αντίστοιχα, έχουν παράγωγο στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$, τότε και οι συναρτήσεις $f_\Pi = f_1 \cdot f_2$ και $f_\Delta = \frac{f_1}{f_2}$ (αν $f_2(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ για την f_Δ) έχουν παράγωγο στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ και ισχύουν:

$f'_\Pi = f'_1 f_2 + f_1 f'_2$ και $f'_\Delta = \frac{f'_1 f_2 - f'_1 f_2}{f_2^2}$ εφ' όσον οι f_1, f_2 παραγωγίζονται $\forall \ x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$.

Απόδειξη: Αφού εξ υποθέσεως οι f_1 και f_2 έχουν παράγωγο στη θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ θα υπάρχουν τα:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f_1(x) - f_1(\xi)}{x - \xi} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\xi} \frac{f_2(x) - f_2(\xi)}{x - \xi}$$

Επειδή όμως οι f_1 και f_2 έχουν παράγωγο στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ κατά την πρόταση 1 αυτές είναι και συνεχείς στην θέση αυτή, επομένως θα ισχύουν:

$$\lim_{x\to\xi} f_1(x) = f_1(\xi) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\xi} f_2(x) = f_2(\xi).$$

Για να υπάρχει τώρα παράγωγος της f_Π στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ θα πρέπει να υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_\Pi(x) - f_\Pi(\xi)}{x - \xi}$

Έχουμε διαδοχικά: $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_\Pi(x) - f_\Pi(\xi)}{x - \xi} = \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x) f_2(x) - f_1(\xi) f_2(\xi)}{x - \xi}$

$$= \lim_{x\to\xi} \frac{f_1(x) f_2(x) - f_1(\xi) f_2(x) + f_1(\xi) f_2(x) - f_1(\xi) f_2(\xi)}{x - \xi} =$$

$$= \lim_{x\to\xi} \frac{f_2(x)[f_1(x) - f_1(\xi)] + f_1(\xi)[f_2(x) - f_2(\xi)]}{x - \xi}$$

$$= \lim_{x\to\xi} \frac{f_1(x) - f_1(\xi)}{x - \xi} \cdot \lim_{x\to\xi} f_2(x) + f_1(\xi) \lim_{x\to\xi} \frac{f_2(x) - f_2(\xi)}{x - \xi} =$$

$= f'_1(\xi) f_2(\xi) + f_1(\xi) f'_2(\xi).$

Ώστε: $f'_\Pi(\xi) = f'_1(\xi) f_2(\xi) + f_1(\xi) f'_2(\xi).$

Και αν αυτό ισχύει $\forall \ x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ θα έχουμε:

$f'_\Pi = f'_1 f_2 + f_1 f'_2$

Παρατήρηση:

Εάν η συνάρτηση f με $f(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)$ έχει παράγωγο στη θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ δεν συνεπάγεται πάντα, ότι και οι συναρτήσεις f_1, f_2 έχουν παραγώγους στη θέση $x = \xi$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με τύπους αντίστοιχα:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ 3 & \text{αν } x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \neq 0 \\ 3 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Προφανώς η συνάρτηση f με $f(x) = f_1(x)f_2(x) = 3 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ έχει παράγωγο στην θέση $x = 0$, ενώ οι f_1, f_2 δεν έχουν παράγωγους στην θέση $x = 0$.

Για την συνάρτηση f_Δ έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f_1(x)f_2(\xi)-f_2(x)f_1(\xi)}{f_2(x)f_2(\xi)(x-\xi)} = \frac{1}{f_2(\xi)}\cdot$$

$$\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f_2(x)} \lim_{x\to\xi} \frac{f_1(x)f_2(\xi)-f_2(x)f_1(\xi)}{x-\xi} = \frac{1}{f_2(\xi)} \cdot \frac{1}{f_2(\xi)} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to\xi} \frac{f_1(x)f_2(\xi)-f_1(\xi)f_2(\xi)+f_1(\xi)f_2(\xi)-f_2(x)f_1(\xi)}{x-\xi} = \frac{1}{[f_2(\xi)]^2}$$

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f_2(\xi)[f_1(x)-f_1(\xi)]-f_1(\xi)[f_2(x)-f_2(\xi)]}{x-\xi} =$$

$$= \frac{1}{[f_2(\xi)]^2}\left[f_2(\xi)\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi} - f_1(\xi)\lim_{x\to\xi}\frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi}\right] =$$

$$= \frac{1}{[f_2(\xi)]^2}\cdot(f_2(\xi)f_1'(\xi)-f_1(\xi)f_2'(\xi)) = \frac{f_1'(\xi)f_2(\xi)-f_2'(\xi)f_1(\xi)}{f_2^2(\xi)}$$

Επειδή η f_2 είναι συνεχής στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ είναι $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{f_2(\xi)}$ (που εχρησιμοποιήθηκε παραπάνω).

Ώστε είναι: $f_\Delta'(\xi) = \frac{f_1'(\xi)f_2(\xi)-f_2'(\xi)f_1(\xi)}{f_2^2(\xi)}$

Και αν αυτό συμβαίνει $\forall \ x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ με $f_2(x) \neq 0$, θα έχουμε: $f_\Delta' = \frac{f_1'f_2-f_2'f_1}{f_2^2} \ \forall \ x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$

3. Παράγωγος σταθεράς επί συνάρτηση.

1. $[\kappa f(x)]' = \kappa f'(x) \ \forall \ x \in \mathcal{D}(f)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$ (σταθερά)

Απόδειξη: Την κ θεωρούμε σαν σταθερή συνάρτηση και επομένως $[\kappa f(x)]' = \kappa' f(x) + f'(x)\kappa = \kappa f'(x)$ αφού, όπως ξέρουμε, η παράγωγος μιας σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν.

2. $[\kappa_1 f_1(x) + \kappa_2 f_2(x) + \ldots + \kappa_\nu f_\nu(x)]' = \kappa_1 f_1'(x) + \kappa_2 f_2'(x) + \ldots + \kappa_\nu f_\nu'(x)$**, όπου** $\nu \in \mathbb{N}$, $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\nu$ **σταθερές στο** $\mathbb{R}$ **και** $\forall\, x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(f_\nu)$.

Απόδειξη: Άμεση εφαρμογή παραγώγου αθροίσματος και του αμέσως προηγούμενου

3. Γενίκευση για γινόμενο συναρτήσεων

Εάν $f = f_1 . f_2 \ldots f_\nu / \nu \in \mathbb{N}$, **τότε** $\forall x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(f_\nu)$ **ισχύει:** $f' = f_1' f_2 \ldots f_\nu + f_1 f_2' \ldots f_\nu + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_\nu'$

Συμβολικά $\left(\prod_{i=1}^{\nu} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{\nu} \left[f_i' \prod_{j=1}^{\nu} f_j \right]$ **με** $i \neq j$, $\nu \geq 2$.

Απόδειξη: Για $\nu = 2$ γνωρίζουμε, ότι ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $\nu = \rho \in \mathbb{N}$, δηλαδή:

$$\left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{\rho} \left[f_i' \prod_{j=1}^{\rho} f_j \right]$$

Επειδή $\left(\prod_{i=1}^{\rho+1} f_i\right)' = \left[\left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right)(f_{\rho+1})\right]' = \left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right)' f_{\rho+1} + \left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right) f_{\rho+1}' = \sum_{i=1}^{\rho} \left[f_i' \prod_{j=1}^{\rho} f_j \right] + \left(\prod_{i=1}^{\rho} f_i\right) f_{\rho+1}' = \sum_{i=1}^{\rho+1} \left[f_i' \prod_{j=1}^{\rho+1} f_j \right]$, $i \neq j$

έπεται ότι η πρόταση ισχύει και για $\nu = \rho + 1$, άρα $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$: $\nu \geq 2$.

4. Εάν $f_1(x) = \frac{1}{f(x)} \,|\, f(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{D}(f)$, **τότε:**

$f_1'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ **και αν** $f_1(x) = \frac{\kappa}{f(x)}$, **τότε** $f_1'(x) = \frac{-\kappa f'(x)}{f^2(x)}$

Απόδειξη: Έχουμε: $\left(\frac{\kappa}{f(x)}\right)' = \frac{(\kappa)' f(x) - f'(x)\kappa}{f^2(x)} = -\frac{\kappa f'(x)}{f^2(x)}$

5. $[f^\nu(x)]' = \nu f^{\nu-1}(x) f'(x) / \nu \in \mathbb{N}$

Απόδειξη: Είναι: $f^\nu(x) = f(x) f(x) \ldots f(x)$ και επομένως: $[f^\nu(x)]' = f'(x) f(x) \ldots f(x) + f(x) f'(x) \ldots f(x) + \ldots + f(x) \ldots f'(x) = \nu f^{\nu-1}(x) f'(x)$

6. $\frac{(f_1 . f_2 \ldots f_\nu)'}{f_1 f_2 \ldots f_\nu} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \ldots + \frac{f_\nu'}{f_\nu}$ **με** $f_\nu(x) \neq 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ $\forall\, x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(f_\nu)$.

Απόδειξη: $\frac{(f_1f_2\ldots f_\nu)'}{f_1f_2\ldots f_\nu} = \frac{f_1'f_2\ldots f_\nu+f_1f_2'\ldots f_\nu+\ldots+f_1f_2\ldots f_\nu'}{f_1f_2\ldots f_\nu} =$

$= \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \ldots + \frac{f_\nu'}{f_\nu}$

Ορισμός. Καλούμε λογαριθμική παράγωγο της συνάρτησης f με $f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \mathcal{D}(f)$ το πηλίκο $\frac{f'}{f}$.

Σύμφωνα τώρα προς αυτό τον ορισμό και της παραπάνω παρατήρησης 6 έχουμε την πρόταση.

Πρόταση 2. Η λογαριθμική παράγωγος ενός γινομένου συναρτήσεων ισούται προς το άθροισμα των λογαριθμικών παραγώγων των παραγόντων αυτού.

7. Παράγωγος εφαπτομένης.

Είναι $(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$

$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Δηλαδή $\mathbf{(\varepsilon\varphi x)'} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in Z.$

8. Παράγωγος συνεφαπτομένης.

Είναι $(\sigma\varphi x)' = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} =$

$= \frac{-\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

Δηλαδή $\mathbf{(\sigma\varphi x)'} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}, \ x \neq \kappa\pi, \ \kappa \in Z.$

9. Παράγωγος $\log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$.

Είναι $(\log_\alpha x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln\alpha}\right)' = \left(\frac{1}{\ln\alpha}\ln x\right)' = \frac{1}{\ln\alpha}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln\alpha}$

Δηλαδή: $(\log_\alpha x)' = \frac{1}{x\ln\alpha} \quad \forall \ x \in \mathbb{R}_+^*$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:
$\mathbf{f(x) = 4\ln\alpha + x - x^4 + 2\sqrt{x} - e^x + 2x + \eta\mu x + \eta\mu 2x + \varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x + \ln x}$

Λύση: Η f είναι άθροισμα οπότε έχουμε:
$f'(x) = (4\ln\alpha)' + (x)' - (x^4)' + (2\sqrt{x})' - (e^x)' + (2^x)' + (\eta\mu x)' + (\eta\mu 2x)' +$

$+\varepsilon\varphi x)'-(\sigma\varphi x)'+(\ln x)' =$

$= 0+1-4x^3+2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-e^x+2^x\ln 2+\sigma\upsilon\nu x+(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)'+(\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x})'-$

$-(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x})'+\dfrac{1}{x} =$

$= 1-4x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-e^x+2^x\ln 2+\sigma\upsilon\nu x+2[(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)']-$

$+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}+\dfrac{1}{x} =$

$= 1-4x^3+\dfrac{\sqrt{x}}{x}-e^x+2^x\ln 2+\sigma\upsilon\nu x+2(\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x)+\dfrac{1}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}+\dfrac{1}{x}$

για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η f.

2. Να βρείτε τις παράγωγους των ακόλουθων συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2x^5+4x^3+2x-\lambda/\lambda\in\mathbb{R}$ **2.** $f(x) = (4x^3+2x)(x^2+3x+1)$

3. $f(x) = \dfrac{4x^2-7x}{x^2+1}$ **4.** $f(x) = \dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$

5. $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x+3\eta\mu x$ **6.** $f(x) = (x^2+3)\varepsilon\varphi x+(2x+1)\eta\mu^2 x$

7. $f(x) = 2e^x+\log x$

Λύση: 1. Εφαρμόζουμε τον κανόνα αθροίσματος και δυνάμεως με εκθέτη φυσικό αριθμό και έχουμε:

$f'(x) = (2x^5)'+(4x^3)'+(2x)'-(\lambda)' = 10x^4+12x^2+2-0 =$

$= 10x^4+12x^2+2$

2. $f'(x) = (4x^3+2x)'(x^2+3x+1)+(4x^3+2x)(x^2+3x+1)' =$

$= [(4x^3)'+(2x)'](x^2+3x+1)+(4x^3+2x)[(x^2)'+(3x)'+1'] =$

$=(12x^2+2)(x^2+3x+1)+(4x^3+2x)(2x+3)$

3. $f'(x) = \dfrac{(4x^2-7x)'(x^2+1)-(x^2+1)'(4x^2-7x)}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{(8x-7)(x^2+1)-2x(4x^2-7x)}{(x^2+1)^2}$

4. $f'(x) = \dfrac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)'(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2} =$

$= \dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2} =$

$= -\dfrac{2}{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}\ \forall\ x\in\mathcal{D}(f)$

5. $f'(x) = (3\sigma\upsilon\nu x)'+(2\eta\mu x)' = -3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x$

6. $f'(x) = [(x^2+3)\varepsilon\varphi x]'+[(2x+1)\eta\mu^2 x]' =$

$= (x^2+3)'εφx+(x^2+3)(εφx)'+(2x+1)'ημ^2x+(2x+1)(ημ^2x)' =$

$= 2xεφx+(x^2+3)\frac{1}{συν^2x}+2ημ^2x+(2x+1)(ημxημx)' =$

$= 2xεφx+\frac{x^2+3}{συν^2x}+2ημ^2x+(2x+1)2ημxσυνx.$

7. $f'(x) = (2e^x+\log x)' = (2e^x)'+(\log x)' = 2e^x+\frac{1}{x}.$

3. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = xe^x\ln x+2^x+ημx$ **2.** $h(x) = e^x(ημx-συνx)$

3. $g(x) = e^x\ln x-\sqrt{x}5^x+4x^5$ **4.** $φ(x) = \frac{\ln x}{e^x}+\frac{\sqrt{x}}{ημx}$

Λύση: 1. Είναι παράγωγος αθροίσματος και γινομένου. Οπότε έχουμε:

$f'(x) = (xe^x\ln x)'+(2^x)'+(ημx)' = x'(e^x\ln x)+x(e^x)'\ln x+$
$+xe^x(\ln x)'+2^x\ln 2+συνx = e^x\ln x+xe^x\ln x+xe^x\frac{1}{x}+2^x\ln 2+συνx.$

2. Όμοια είναι παράγωγος γινομένου και διαφοράς οπότε
$h'(x) = [e^x(ημx-συνx)]' = (e^x)'(ημx-συνx)+e^x(ημx-συνx)' =$
$= e^x(ημx-συνx)+e^x[(ημx)'-(συνx)'] = e^x(ημx-συνx)+$
$+e^x(συνx+ημx) = 2e^xημx.$

3. Έχουμε $g'(x) = (e^x\ln x-\sqrt{x}5^x+4x^5)' =$
$= (e^x\ln x)'-(\sqrt{x}5^x)'+(4x^5)' = (e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'-$
$-[(\sqrt{x})'5^x+\sqrt{x}(5^x)']+4(x^5)' =$
$= e^x\ln x+\frac{e^x}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}5^x-\sqrt{x}5^x\ln 5+20x^4$

4. Όμοια έχουμε: $φ'(x) = \left(\frac{\ln x}{e^x}+\frac{\sqrt{x}}{ημx}\right)' = \left(\frac{\ln x}{e^x}\right)'+\left(\frac{\sqrt{x}}{ημx}\right)' =$

$= \frac{(\ln x)'e^x-\ln x(e^x)'}{e^{2x}}+\frac{(\sqrt{x})'ημx-\sqrt{x}(ημx)'}{ημ^2x} =$

$= \frac{\frac{1}{x}e^x-\ln xe^x}{e^{2x}}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}ημx-\sqrt{x}συνx}{ημ^2x} = \frac{1-x\ln x}{xe^x}+\frac{ημx-2xσυνx}{2\sqrt{x}ημ^2x}$

4. Δίνεται η συνάρτηση f με γραφική παράσταση την G και εξίσωση την $f(x) = -x^2$.
Να βρεθούν οι ευθείες $y = αx+1$ που εφάπτονται της G και να δειχτεί ότι τέμνουν τον άξονα y'y στο ίδιο σημείο.

Λύση: Αν (x_0,y_0) είναι οι συντεταγμένες του σημείου επαφής

τότε η εξίσωση της εφαπτομένης σ'αυτό το σημείο είναι:
$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$ (1) με $f(x_0) = y_0 = -x_0^2$ και
$f'(x_0) = -2x_0$ και η (1) γίνεται:
$y+x_0^2 = -2x_0(x-x_0) \Leftrightarrow 2x_0x+y-x_0^2 = 0$ (2)
Θα πρέπει τώρα η (2) και η $y = \alpha x+1$ να ταυτίζονται δηλαδή:

$$\frac{2x_0}{\alpha} = \frac{+1}{-1} = \frac{-x_0^2}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = -\alpha \\ x_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 1 \\ \alpha = \mp 2 \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι $y = -2x+1$ και $y = 2x+1$.
Η ευθεία $y = -2x+1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$ από το οποίο προφανώς διέρχεται και η $y = 2x+1$.
Τα σημεία στα οποία οι ευθείες $y = \alpha x+1$ εφάπτονται της G είναι $(1,-1)$ και $(-1,-1)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2}{x}$.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f που περνά από το σημείο ($c \neq 0$) του άξονα x'x.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση κάθε ευθείας που περνά από ένα γνωστό σημείο $(c,0)$ και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y-0 = \lambda(x-c)$ (1)
Επειδή η (1) θέλουμε να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ τον παράγωγο αριθμό στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ του διαγράμματος της f. Είναι δε $\lambda = f'(\xi) = -\frac{2}{\xi^2}$. Άρα η (1) γίνεται $y = -\frac{2}{\xi^2}(x-c)$ (2)
Επειδή δε το σημείο $M(\xi,f(\xi))$ βρίσκεται πάνω στην γραφική παράσταση της f θα επαληθεύει την εξίσωσή της και την (2).
Δηλαδή: $f(\xi) = \frac{2}{\xi}$ (3) και $f(\xi) = -\frac{2}{\xi^2}(\xi-c)$ (4).

Αν λύσουμε το σύστημα των (3) και (4) με άγνωστους τους ξ, f(ξ) παίρνουμε $\xi = \frac{c}{2}$ και $f(\xi) = \frac{4}{c}$.
Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -\frac{4}{c^2}(x-c)$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = c(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$ (1) c,ρ_1,ρ_2,ρ_3 σταθερές του $\mathbb{R}$.

Δείξετε ότι $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \frac{1}{x-\rho_3}$

Απόδειξη: Η f είναι γινόμενο και επομένως έχουμε:

$f'(x) = c(x-\rho_1)'(x-\rho_2)(x-\rho_3)+c(x-\rho_1)(x-\rho_2)'(x-\rho_3)+$
$+c(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)' \Rightarrow f'(x) = c(x-\rho_2)(x-\rho_3)+c(x-\rho_1)(x-\rho_3)+$
$+c(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ (2).

Διαιρούμε κατά μέλη τις (2) και (1). Επομένως είναι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{c(x-\rho_2)(x-\rho_3)+c(x-\rho_1)(x-\rho_3)+c(x-\rho_1)(x-\rho_2)}{c(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)} =$$

$$= \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \frac{1}{x-\rho_3}$$

7. Εάν $f(x) = x^2\ln x$ δείξετε ότι $2f(x)+x^2 = xf'(x)$ (1)

Λύση: Βρίσκουμε την παράγωγο της f και έχουμε:

$f'(x) = (x^2\ln x)' = (x^2)'\ln x+x^2(\ln x)' = 2x\ln x+x^2\frac{1}{x} =$

$= 2x\ln x+x$. Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε:

$xf'(x) = x(2x\ln x+x) = 2x^2\ln x+x^2 = 2f(x)+x^2$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3e^x$.
Να βρεθεί η συνάρτηση 3ης παραγώγου της f.

Λύση: Είναι $f'(x) = (x^3e^x)' = (x^3)'e^x+x^3(e^x)' =$
$= 3x^2e^x+x^3e^x = e^x(3x^2+x^3)$

$f''(x) = (e^x)'(3x^2+x^3)+e^x(3x^2+x^3)' = e^x(3x^2+x^3+6x+3x^2) =$
$= e^x(6x^2+6x+x^3)$ και

$f'''(x) = (e^x)'(6x^2+6x+x^3)+e^x(6x^2+6x+x^3)' =$
$= e^x[6x^2+6x+x^3+12x+6+3x^2] = e^x(x^3+9x^2+18x+6)$.

5.7α. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Πρόταση . Θεωρούμε την συνάρτηση f_1 με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f_1)$ και συνεχή σ'αυτό. Και την συνάρτηση f_2 με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f_2)$ έτσι ώστε $\mathcal{R}(f_1) \subset \mathcal{D}(f_2)$. Τότε υπάρχει η σύνθετη συνάρτηση $f_2 o f_1$. Εάν υπάρχει η παράγωγος $f_1'(\xi)$ της f_1 στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1)$ και είναι πεπερασμένη και αν στη θέση $f_1(\xi)$ υπάρχει η παράγωγος $f_2'[f_1(\xi)]$ της f_2 και είναι πεπερασμένη, τότε υπάρχει και η παράγωγος της $f_2 o f_1$ στη θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1)$ και ισχύει:

$$[f_2(f_1(\xi))]' = f_2'[f_1(\xi)]f_1'(\xi)$$

Απόδειξη: Αφού από την υπόθεση υπάρχει η παράγωγος της f_1

στη θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f_1)$, θα υπάρχει και το
$\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi} = f_1'(\xi)$.

Εάν θεωρήσουμε την συνάρτηση: $\delta_1(x) = \frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi} - f_1'(\xi)$ -(1)

με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f_1)-\{\xi\}$, τότε για $x\to\xi$ θα είναι $\lim\limits_{x\to\xi}\delta_1(x) = 0$.

Από την (1) παίρνουμε: $f_1(x) = f_1(\xi)+(x-\xi)\left[(f_1'(\xi)+\delta_1(x)\right]$ με $\delta_1(x)\to 0$, όταν $x\to\xi$.

Επειδή τώρα υπάρχει και η παράγωγος της f_2 στην θέση $f_1(\xi) \in \mathcal{R}(f_1) \subset \mathcal{D}(f_2)$ θα υπάρχει και το:

$$\lim_{f_1(x)\to f_1(\xi)} \frac{f_2[f_1(x)]-f_2[f_1(\xi)]}{f_1(x)-f_1(\xi)} = f_2'[f_1(\xi)].$$

Θεωρούμε την συνάρτηση: $\delta_2(x) = \frac{f_2[f_1(x)]-f_2[f_1(\xi)]}{f_1(x)-f_1(\xi)} - f_2'[f_1(\xi)]$ (2) με πεδίο ορισμού το $\mathcal{R}(f_1)-\{f_1(\xi)\}$ και με $\lim\limits_{f_1(x)\to f_1(\xi)}\delta_2(x) = 0$.

Πράγματι αφού η f_1 είναι συνεχής θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) = f_1(\xi)$ και επειδή υπάρχει η παράγωγος της f_2 στην θέση $f_1(\xi)$, θα είναι η f_2 και συνεχής στην θέση αυτή και επομένως $\lim\limits_{x\to\xi} f_2[f_1(x)] = f_2[f_1(\xi)]$, οπότε και $\delta_2(x)\to 0$, όταν $x\to\xi$.

Από την (2) παίρνουμε:

$f_2[f_1(x)] = f_2[f_1(\xi)]+[f_1(x)-f_1(\xi)][\delta_2(x)+f_2']f_1(\xi)]$

με $\delta_2(x)\to 0$, όταν $x\to\xi$.

Θα αναζητήσουμε τώρα το: $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_2[f_1(x)]-f_2[f_1(\xi)]}{x-\xi}$

Δηλαδή θα αναζητήσουμε την παράγωγο της $f_2 o f_1$ στην θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ αν υπάρχει.

Με την βοήθεια των παραπάνω έχουμε:

$f_2[f_1(x)]-f_2[f_1(\xi)] = [f_1(x)-f_1(\xi)][\delta_2(x)+f_2']f_1(\xi)] =$
$= (x-\xi)[f_1'(\xi)+\delta_1(x)][\delta_2(x)+f_2']f_1(\xi)] =$
$= (x-\xi)f_1'(\xi)f_2'[f_1(\xi)]+(x-\xi)[\delta_1(x)\delta_2(x)+\delta_2(x)(f_1'(\xi))+$
$+\delta_1(x)f_2'f_1(\xi)]$. Αλλά όταν $x\to\xi$, $\delta_1(x)\to 0$ και $\delta_2(x)\to 0$, όπως είδαμε και προηγουμένως και επομένως:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f_2[f_1(x)]-f_2[f_1(\xi)]}{x-\xi} = f_2'[f_1(\xi)]f_1'(\xi)$$

Δηλαδή υπάρχει η παράγωγος της $f_2 o f_1$ στη θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$

και είναι πεπερασμένη.

Ο τύπος που μας δίνει την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $f_2 o f_1$, στη θέση $x = \xi \in \mathfrak{D}(f)$ είναι σύμφωνα με τα παραπάνω:

$(f_2[f_1(\xi)])' = f_2'[f_1(\xi)]f_1'(\xi)$

Εάν οι συναρτήσεις f_1 και f_2 έχουν παραγώγους $\forall\ x \in \mathfrak{D}(f_1)$, τότε και η σύνθετη συνάρτηση $f = f_2 o f_1$ έχει παράγωγο $\forall\ x \in \mathfrak{D}(f_1)$ και ισχύει: $f' = f_2'(f_1)f_1'$

Έτσι αν $f_1(x) = 3x^2+x$ και $f_2(x) = ημx$ η σύνθετη συνάρτηση $f_2 o f_1$ είναι η: $f(x) = f_2[f_1(x)] = ημ(3x^2+1)$

Εάν καλέσουμε το $3x^2+x = t$, θα έχουμε:

$f(x) = f_2[f_1(x)] = f_2(t) = ημt$ με $t = 3x^2+1$

Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα, η παράγωγος της $f_2 o f_1$ = ως προς την μεταβλητή x θα είναι:

$f'(x) = f_2'(t)f_1'(x) = (ημt)'(3x^2+x)' = συνt(6x+1) =$

$= [συν(3x^2+x)](6x+1) = (6x+1)συν(3x^2+x)$.

Από το παράδειγμα αυτό γίνεται φανερό ότι ο τύπος τίθεται με την εξής απλούστερη μορφή: $f_x' = φ_t'σ_x'$

Δηλαδή ο τόνος σημαίνει παράγωγος της αντίστοιχης συνάρτησης ως προς την μεταβλητή από την οποία εξαρτάται η αντίστοιχη συνάρτηση. Έτσι αν υπάρχουν οι προϋποθέσεις,ώστε να έχουμε την συνάρτηση F ως σύνθεση των συναρτήσεων φ,σ,h και υπάρχουν οι προϋποθέσεις ύπαρξης παραγώγων $\forall\ x \in \mathfrak{D}(h)$ και είναι: $F(x) = φ(z)$, όπου $z = σ(t)$, όπου $t = h(x)$, δηλαδή είναι: $F = h[σ(φ(x)] = (φoσoh)(x)$, τότε θα έχουμε:

$F_x' = φ_z'σ_t'h_x'$

Παρατήρηση:

Εάν η F με $F = f_2 o f_1$ έχει παράγωγο στην θέση $x = \xi$ του πεδίου ορισμού της, αυτό δεν σημαίνει αναγκαία ότι και κάθε μία από αυτές έχει αντίστοιχα παράγωγο στην θέση ξ και f(ξ)

Παράδειγμα.

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x+1 & αν\ x \geq 1 \\ 5x-3 & αν\ x < 1 \end{cases}$

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} αυτής είναι η:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & αν\ x \geq 2 \\ \frac{x+3}{5} & αν\ x < 2 \end{cases}$$

Προφανώς η f στην θέση x = 1 δεν έχει παράγωγο καθώς και η f^{-1} στην θέση x = f(1) = 2 δεν έχει επίσης παράγωγο παρόλα αυτά η σύνθεση αυτών $f^{-1}[f(x)] = x$ έχει παράγωγο $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

5.8. Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων (f,φ συναρτήσεις του x)

1. $[f^{\nu}]' = \nu f^{\nu-1} f'$
2. $[\sqrt{f}]' = \frac{1}{2\sqrt{f}} f'$
3. $[\sqrt[\nu]{f}]' = [f^{\frac{1}{\nu}}]' = \frac{1}{\nu} f^{\frac{1}{\nu}-1} f'$
4. $[e^{f}]' = e^{f} f'$
5. $[\alpha^{f}]' = \alpha^{f} \ln\alpha f', 0 < \alpha \neq 1$
6. $[\ln f]' = \frac{1}{f} f'$
7. $[\log_{\alpha} f]' = \frac{1}{f \ln\alpha} f'$
8. $[\eta\mu f]' = \sigma\upsilon\nu f f'$
9. $[\sigma\upsilon\nu f]' = -\eta\mu f f'$
10. $[\varepsilon\varphi f]' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2} f} f'$
11. $[\sigma\varphi f]' = -\frac{1}{\eta\mu^{2} f} f'$
12. $[\ln^{\nu} f]' = \nu \ln^{\nu-1} f \cdot (\ln f)'$
13. $[\eta\mu^{\nu} f]' = \nu\eta\mu^{\nu-1} f \cdot (\eta\mu f)'$
14. $[\sigma\upsilon\nu^{\nu} f]' = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} f \cdot (\sigma\upsilon\nu f)'$
15. $[\varepsilon\varphi^{\nu} f]' = \nu\varepsilon\varphi^{\nu-1} f (\varepsilon\varphi f)'$
16. $[\sigma\varphi^{\nu} f]' = \nu\sigma\varphi^{\nu-1} f \cdot (\sigma\varphi f)'$
17. $(\log_{\alpha}^{\nu} f)' = \nu \log_{\alpha}^{\nu-1} f (\log_{\alpha} f)'$
18. $(f^{\varphi})' = (e^{\varphi \ln f})' = e^{\varphi \ln f} (\varphi \ln f)' = f^{\varphi} (\varphi \ln f)'$

Οι αποδείξεις των παραπάνω ιδιοτήτων γίνονται με βάση το θεώρημα παραγώγου σύνθετης συνάρτησης.

Έτσι για την απόδειξη π.χ της 18 έχουμε αν θέσουμε

$h(x) = f(x)^{\varphi(x)}$ τότε $h(x) = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$ (1)

και με $t(x) = \varphi(x)\ln f(x)$ και $h(t) = e^{t}$ παίρνουμε

$h'_x = h'_t h'_x = (e^{t})'(\varphi(x)\ln f(x))' =$

$= e^{\varphi(x)\ln f(x)}(\varphi(x)\ln f(x))' = f(x)^{\varphi(x)}(\varphi(x)\ln f(x))'$ κ.λ.π.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i. $f(x) = e^{x^{2}+2}$

ii. $\varphi(x) = 4^{\ln x + \eta\mu x}$

iii. $h(x) = \ln(\eta\mu x)$

iv. $g(x) = \varepsilon\varphi(3x+2)$

Λύση: i. Θέτουμε $t(x) = x^{2}+2$ και $f(t) = e^{t}$.

Άρα έχουμε $f'_x = f'_t t'_x = (e^t)'(x^2+2)' = e^t 2x = e^{x^2+2}(2x) =$
$= 2xe^{x^2+2}$.

ii. Θέτουμε $t(x) = \ln x + ημx$ και $φ(t) = 4^t$.
Οπότε είναι: $φ'_x = φ'_t t'_x = (4^t)'(\ln x+ημx)' =$
$= 4^t \ln 4(\frac{1}{x} + συνx) = 4^{\ln x + ημx}\ln 4(\frac{1}{x}+συνx)$

iii. Θέτουμε $t(x) = ημx$ και $h(t) = \ln t$ και έχουμε
$h'_x = h'_t t'_x = (\ln t)'(ημx)' = \frac{1}{t}συνx = \frac{1}{ημx}συνx = σφx$.

iv. Θέτουμε $t(x) = 3x+2$ και $g(t) = εφt$ και έχουμε
$g'_x = g'_t t'_x = (εφt)'(3x+2)' = \frac{1}{συν^2 t}3 = \frac{3}{συν^2(3x+2)}$

2. Να βρεθεί η παράγωγος της $F(x) = ημ^3(x^2+1)$.

Λύση: Θέτουμε $F(x) = φ(z) = z^3$, όπου $z = σ(t) = ημt$, όπου
$t = h(x) = x^2+1$. Τότε: $F(x) = φ[σ(h(x)] = [ημ(x^2+1)]^3 =$
$= ημ^3(x^2+1)$. Η παράγωγος θα είναι:
$F'(x) = φ'_z \cdot σ'_t \cdot h'_x = 3z^2συνt(x^2+1)' = 3z^2συνt\ (2x) =$
$= 3z^2συν(x^2+1)2x = 3ημ^2(t)συν(x^2+1)2x =$
$3ημ^2(x^2+1)συν(x^2+1)2x = 6xημ^2(x^2+1)συν(x^2+1)$.
Αντί της παραπάνω εργασίας ακολουθούμε την εξής απλούστερη.
Έχουμε: $F(x) = ημ^3(x^2+1)$ και θέτουμε $z = ημ(x^2+1)$, τότε
$F'(x) = (z^3)' = 3z^2z' = 3ημ^2(x^2+1)[ημ(x^2+1)]'$. Θέτουμε
$x^2+1 = ω$ και έχουμε: $F'(x) = 3ημ^2(x^2+1)(ημω)' =$
$= 3ημ^2(x^2+1)(συνω)ω' = 3ημ^2(x^2+1)συν(x^2+1)(x^2+1)' =$
$= 3ημ^2(x^2+1)συν(x^2+1)(2x) = 6xημ^2(x^2+1)συν(x^2+1)$, που είναι προφανώς η παραπάνω εργασία συντομευμένη.

3. Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = ημ[συν(x^4+1)]$ (υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει η παράγωγος στο $\mathcal{D}(f)$).

Απάντηση: Θέτουμε $συν(x^4+1) = φ$ και τότε: $f'(x) = (ημφ)' =$
$= συνφφ' = συν(συν(x^4+1))(συν(x^4+1))'$. Θέτουμε $x^4+1 = y$
και έχουμε: $f'(x) = συν(συν(x^4+1))(συνy)' =$
$= συν(συν(x^4+1))(-ημy)y' = -συν(συν(x^4+1))ημyy' =$
$= -συν(συν(x^4+1))ημ(x^4+1)(x^4+1)' = -4x^3συν(συν(x^4+1))\cdot$
$\cdot ημ(x^4+1)$

4. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^x$ **2.** $g(x) = (x^2+1)^{\sqrt{x}}$ **3.** $h(x) = x^{x^x}$

4. $\varphi(x) = (\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi\sqrt[3]{x}}$

Λύση: 1. 1ος τρόπος. Η f γράφεται $f(x) = e^{x\ln x}$ και με βάση την πρόταση (4) έχουμε:

$f'(x) = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x+x(\ln x)') =$
$= x^x(\ln x+1)$.

2ος τρόπος. Λογαριθμούμε τα μέλη της (1) και έχουμε $\ln f = x\ln x$ (i). Παραγωγίζουμε τα μέλη της (i) οπότε:

$(\ln f)' = (x\ln x)' \Rightarrow \frac{1}{f} f' = \ln x+1 \Rightarrow f'(x) = f(x)(1+\ln x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = x^x(1+\ln x)$.

2. Είναι $g(x) = e^{\sqrt{x}\ln(x^2+1)} \Rightarrow g'(x) =$

$= e^{\sqrt{x}\ln(x^2+1)}(\sqrt{x}\ln(x^2+1))' =$

$= (x^2+1)^{\sqrt{x}}((\sqrt{x})'\ln(x^2+1)+\sqrt{x}(\ln(x^2+1))' =$

$= (x^2+1)^{\sqrt{x}} [\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x^2+1)+\sqrt{x}\frac{1}{x^2+1} 2x]$

Όμοια μπορεί να λυθεί αν λογαριθμήσουμε τα μέλη της (2) και μετά παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας που θα βρούμε

3. Θέτουμε $t(x) = x^x$ και η συνάρτηση γίνεται:

$h(x) = x^{t(x)} = e^{t(x)\ln x} \Rightarrow h'(x) = (e^{t(x)\ln x})' =$

$= e^{t(x)\ln x}(t(x)\ln x)' = x^{t(x)}(t'(x)\ln x+t(x)\frac{1}{x})$.

Και επειδή $t'(x) = x^x(1+\ln x)$

Έχουμε: $h'(x) = x^{x^x}[x^x(1+\ln x)\ln x+x^x\frac{1}{x}]$

4. Λογαριθμούμε τα μέλη και έχουμε:

$\ln\varphi = \varepsilon\varphi\sqrt[3]{x}\ln(\eta\mu x) \rightarrow (\ln\varphi)' = [\varepsilon\varphi\sqrt[3]{x}\ln(\eta\mu x)]' \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\varphi}\varphi' = (\varepsilon\varphi\sqrt[3]{x})'\ln(\eta\mu x)+\varepsilon\varphi\sqrt[3]{x}\frac{1}{\eta\mu x}(\eta\mu x)' \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) [\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x})'\ln(\eta\mu x)-\varepsilon\varphi\sqrt[3]{x}\sigma\varphi x] \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = (\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi\sqrt[3]{x}} [\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ln(\eta\mu x)-\varepsilon\varphi\sqrt[3]{x}\sigma\varphi x]$.

5. Εάν $f(\eta\mu^2 x) = \sigma\upsilon\nu^7 x$. Δείξετε ότι $f'(\frac{1}{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{16}$

Λύση: Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης σχέσης και έχουμε:

$[f(\eta\mu^2x)]' = (\sigma\upsilon\nu^7x)' \Rightarrow f'(\eta\mu^2x)(\eta\mu^2x)' =$
$= 7\sigma\upsilon\nu^6x(\sigma\upsilon\nu x)' \Rightarrow f'(\eta\mu^2x)2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = -7\sigma\upsilon\nu^6x\eta\mu x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2f'(\eta\mu^2x) = -7\sigma\upsilon\nu^5x \quad (1)$

Αν στη σχέση θέσουμε όπου $x = \frac{\pi}{4}$ τότε παίρνουμε

$$2f'((\frac{\sqrt{2}}{2})^2) = -7(\frac{\sqrt{2}}{2})^5 \Rightarrow 2f'(\frac{1}{2}) = -7\frac{4\sqrt{2}}{32} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = -\frac{7\sqrt{2}}{16}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$.
Δείξετε ότι $f^3f''+1 = 0$.

Λύση: Είναι $f' = \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}(2x-x^2)' = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} =$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \text{ και } f'' = \frac{(1-x)'\sqrt{2x-x^2}-(1-x)(\sqrt{2x-x^2})'}{(\sqrt{2x-x^2})^2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2x-x^2}-\frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2} \Rightarrow f'' = \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^3f''+1 = \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}(\sqrt{2x-x^2})^3+1 =$$

$$= \frac{-(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}+1 = 0 \Rightarrow f^3f''+1 = 0.$$

7. Εάν $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+\eta\mu^2x}$, δείξετε ότι: $f(\frac{\pi}{4})-3f'(\frac{\pi}{4}) = 3$

Λύση: Έχουμε $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1/2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ και

$$f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu^2x)'(1+\eta\mu^2x)-(1+\eta\mu^2x)'\sigma\upsilon\nu^2x}{(1+\eta\mu^2x)^2} =$$

$$= \frac{-2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x(1+\eta\mu^2x)-\sigma\upsilon\nu^2x(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\eta\mu^2x)^2} = \frac{-2\eta\mu 2x}{(1+\eta\mu^2x)^2}, \text{ οπότε}$$

$f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{8}{9}$. Άρα: $f(\frac{\pi}{4})-3f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}-3(\frac{-8}{9}) = 3.$

5.9. Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Θεώρημα.

Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο y = f(x) πεδίου ορισμού $\mathcal{D}(f)$ και σύνολο τιμών $\mathcal{R}(f)$, η οποία είναι συνεχής και

γνήσια μονότονη στο $\mathscr{D}(f)$. Εάν f^{-1} είναι η αντίστροφή της f με τύπο $x = f^{-1}(y)$ και υπάρχει η παράγωγος της f στην θέση $x = \xi \in \mathscr{D}(f)$ και είναι διάφορη του μηδενός (δηλαδή $f'(\xi) \neq 0$), τότε θα υπάρχει και η παράγωγος της f^{-1} στη θέση $\eta = f(\xi) \in \mathscr{R}(f)$ και θα ισχύει:

$$(f^{-1}(\eta))' = \frac{1}{f'(\xi)}$$

Απόδειξη: Όπως ξέρουμε, από τις ιδιότητες των αντίστροφων συναρτήσεων, όταν $\xi \in \mathscr{D}(f)$, τότε $f(\xi) \in \mathscr{R}(f)$, δηλαδή $\eta \in \mathscr{R}(f)$ και αν $\eta \in \mathscr{R}(f)$, τότε $f^{-1}(\eta) = \xi \in \mathscr{D}(f)$.
Ισχύουν επομένως τα εξής:
$\forall\, x \in \mathscr{D}(f)$ θα είναι: $y = f(x) \in \mathscr{R}(f)$ και
$\forall\, y \in \mathscr{R}(f)$ θα είναι: $f^{-1}(y) = x \in \mathscr{D}(f)$
και συνεπώς:
$f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$ και
$f[f^{-1}(y)] = f(x) = y$

Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε την παράγωγο της f^{-1} στη θέση $y = \eta \in \mathscr{R}(f)$ του πεδίου ορισμού της, όπου $\eta = f(\xi)$.
Αναζητάμε αν υπάρχει το: $\lim\limits_{y \to \eta} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta}$ με $y \neq \eta$ (1)

Επειδή κατ'αρχήν υπάρχει η παράγωγος της f στην θέση $x = \xi \in \mathscr{D}(f)$ και είναι $x \neq \xi$, και επειδή η f είναι συνεχής και γνήσια μονότονη επί του $\mathscr{D}(f)$, θα είναι και η f^{-1} συνεχής επί του $\mathscr{R}(f)$ και γνήσια μονότονη σ'αυτό και μάλιστα του ίδιου είδους μονοτονίας.
Τότε όμως θα έχουμε ότι:
$f(x) \neq f(\xi) \Leftrightarrow y \neq \eta$ και $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(\eta)$.
Ώστε αν $y \neq \eta \Leftrightarrow x \neq \xi$, όπου $x = f^{-1}(y)$ και $\xi = f^{-1}(\eta)$
και ακόμη ότι αν $y \to \eta \Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(\eta) \Rightarrow x \to \xi$.
Για να υπάρχει λοιπόν το όριο (1), αρκεί να υπάρχει το όριο:
$\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)}$ με $x \neq \xi$.
Αλλά από την υπόθεση έχουμε: $f'(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \neq 0$

Επομένως: $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} =$

$= \left[\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right]^{-1} = [f'(\xi)]^{-1} = \dfrac{1}{f'(\xi)}$

'Ωστε τελικά έχουμε: $[f^{-1}(\eta)]' = \frac{1}{f'(\xi)}$

Εάν τώρα η f έχει παράγωγο ∀ $x \in \mathcal{D}(f)$ και με τις παραπάνω προϋποθέσεις, τότε και η f^{-1} έχει παράγωγο ∀ $y \in \mathcal{R}(f)$ και ισχύει: $f^{-1}(y)\ ' = \frac{1}{f'(x)}$ ∀ $y \in \mathcal{R}(f)$, όπου $y = f(x)$

Ποιό εύκολα: Η παράγωγος της $f^{-1}(y)$ ως προς y είναι το αντίστροφο της παραγώγου της f(x) ως προς x.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Στην περίπτωση παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} της συνάρτησης f για να υπάρχει η $[f^{-1}(\eta)]'$ θα πρέπει η f να είναι **γνησίως αύξουσα** στην περιοχή του σημείου $\xi \in \mathcal{D}(f)$ γιατί θα υπήρχε x με $x \neq \xi$ έτσι ώστε $f(x) = f(\xi)$.

2. Εάν για τον υπολογισμό της παραγώγου της f^{-1} υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ και είναι $f'(\xi) = 0$, τότε η παράγωγος της f^{-1} στη θέση $f(\xi)$ είναι άπειρη και αν η f είναι αύξουσα, είναι $+\infty$, ενώ αν η f είναι φθίνουσα, είναι $-\infty$.

Επίσης αν η $f'(\xi)$ είναι άπειρη, τότε η παράγωγος της f^{-1} στην θέση $f(\xi)$ υπάρχει και είναι μηδενική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης της f με $f(x) = 4x^3$.

Λύση: Η συνάρτηση f με $f(x) = 4x^3$ είναι συνεχής και παντού παραγωγίσιμη επί του $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση παράγωγος αυτής είναι: $f'(x) = 12x^2$, η οποία προφανώς είναι 0 στη θέση $x = 0 \in \mathcal{D}(f)$. Η αντίστροφη της f υπάρχει και αν $y = 4x^3$ είναι η $x = \sqrt[3]{\frac{y}{4}}$ και η οποία δι' εναλλαγής των μεταβλητών γίνεται: $y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$. Ζητάμε την παράγωγο της $y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$.

Για να βρούμε την παράγωγος της $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}} = y$ δηλαδή την $f'(x)$, θα βρούμε πρώτο την παράγωγο της $f^{-1}(y) = 4y^3$ που είναι $[f^{-1}(y)]' = 12y^2$, θα θέσουμε όπου y το $\sqrt[3]{\frac{x}{4}}$ και το αν-

τίστροφο του εξαγομένου αυτού για $x \neq 0$ θα είναι η παράγωγος $f'(x)$.

Επομένως: $f'(x) = \dfrac{1}{12\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2}} = \dfrac{1}{12\sqrt[3]{\frac{x^2}{16}}}$ $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)-\{0\}$.

2. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = \log_\alpha x$ με $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = y = \log_\alpha x$ έχει, όπως ξέρουμε, αντίστροφο την $x = \alpha^y = f^{-1}(y)$. Είναι δε γνωστές και οι λοιπές ιδιότητες της. Θα πρέπει τώρα η παράγωγος της $f^{-1}(y) = \alpha^y$ ως προς y να ισούται με το αντίστροφο της παραγώγου της $f(x) = \log_\alpha x$ ως προς x.

Επομένως: $(\alpha^y)'_y = \dfrac{1}{(\log_\alpha x)'_x} \Rightarrow (\log_\alpha x)' = \dfrac{1}{(\alpha^y)'} = \alpha^y \log\alpha$

Ώστε $(\log_\alpha x)' = \dfrac{1}{x\log\alpha}$ $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Βέβαια την παράγωγο της $f(x) = \log_\alpha x$ μπορούμε να βρούμε και με άλλο τρόπο ως εξής:

Έχουμε: $f(x) = \dfrac{\log x}{\log \alpha}$ και επομένως:

$$f'(x) = \frac{(\log x)'\log\alpha - (\log\alpha)'\log x}{(\log\alpha)^2} = \frac{\frac{1}{x}.\log\alpha}{(\log\alpha)^2} = \frac{1}{x\log\alpha}$$

$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ $(\alpha \neq 1,\ \alpha > 0)$.

3. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με f(x) = τοξοημx

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η y = τοξοημx είναι παντού ορισμένη $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq x \leq 1$. Επίσης γνωρίζουμε, ότι είναι και η αντίστροφη συνάρτηση της x = ημy με $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, η οποία, όπως ξέρουμε, είναι γνήσια αύξουσα και παραγωγίσιμη $\forall\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Μετά από αυτό θα έχουμε: (τοξοημx)' = y $\Rightarrow$ x = ημy.

Θα πρέπει η παράγωγος της ημy ως προς y να ισούται με το αντίστροφο της παραγώγου της f(x) ως προς x.

Άρα: $(\text{ημ}y)'_y = \dfrac{1}{(\text{τοξοημ}x)_x} \Rightarrow (\text{τοξοημ}x)' = \dfrac{1}{\text{συν}y}$ $|\text{συν}y \neq 0$

και τελικά: $(\text{τοξοημ}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall\ x \in (-1,+1)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Σε θέματα στα οποία ζητείται να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) του διαγράμματος της εργαζόμαστε συνήθως με τους παρακάτω τρόπους:

i) Αν το σημείο (x_0, y_0) είναι δοσμένο και ο τύπος της f γνωστός τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ όπου $f(x_0) = y_0$, και $f'(x_0)$ ο παράγωγος αριθμός της f στη θέση $x = x_0$.

ii) Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το σημείο (x_0, y_0) πάνω στο διάγραμμα της f έτσι ώστε η εφαπτομένη σ'αυτό να πληροί κάποια συνθήκη π.χ η εφαπτομένη σ'αυτό να είναι παράλληλη με κάποια δοσμένη ευθεία ή κάθετη ή να σχηματίζει δοσμένη γωνία με τον άξονα x'x ή να σχηματίζει δοσμένη γωνία με μια άλλη ευθεία ή να συμπίπτει με μια άλλη ευθεία κ.λ.π., τότε από τους συντελεστές διευθύνσεως $f'(x_0)$ της εφαπτομένης και της δοσμένης ευθείας υπολογίζουμε την τετμημένη x_0 από δε τον τύπο της f το $y_0 = f(x_0)$.

iii) Αν θέλουμε να υπολογίσουμε σταθερές του $\mathbb{R}$ που υπάρχουν στον τύπο της f ή στην δοσμένη ευθεία τότε και πάλι γράφουμε τη σχέση μεταξύ των συντελεστών διευθύνσεως $f'(x_0)$ της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο (x_0, y_0) στο διάγραμμα της f και της δοσμένης ευθείας και σε συνέχεια λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $\{f(x_0) = y_0$ και $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\}$.

Τα θέματα που ακολουθούν θα κάνουν πιο κατανοητά τα παραπάνω.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης πάνω στο διάγραμμα της f με $f(x) = x^2 - x - 2$ στο σημείο (-1,0).

Απάντηση: Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1) όπου $f(x_0) = y_0 = 0$, $x_0 = -1$ και $f'(x_0) = f'(-1) = -3$ γιατί $f'(x) = 2x - 1$.

'Αρα είναι $y-0 = -3(x+1) \Leftrightarrow y = -3x-3$.

Θέμα 2. 'Εστω G η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$.
i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της G στο σημείο (1,1).
ii) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της G στο σημείο (1,1).

Λύση: i) Η εφαπτομένη στο σημείο (1,1) έχει εξίσωση $y-f(1) = f'(1)(x-1)$ όπου $f(1) = 1$, και $f'(1) = \frac{2}{5}$ (γιατί $f'(x) = \frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

'Αρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $y-1 = \frac{2}{5}(x-1)$.

ii) Γνωρίζουμε ότι όταν δύο ευθείες είναι κάθετες τότε οι συντελεστές διευθύνσεως τους έχουν γινόμενο -1 και αν λ_K είναι ο συντελεστής διευθύνσεως της κάθετης στο (1,1) και $\lambda_\varepsilon = \frac{2}{5}$ ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης σ'αυτό τότε είναι $\lambda_K\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_K = -\frac{5}{2}$.

Επομένως η εξίσωση της κάθετης είναι: $y-1 = -\frac{5}{2}(x-1)$.

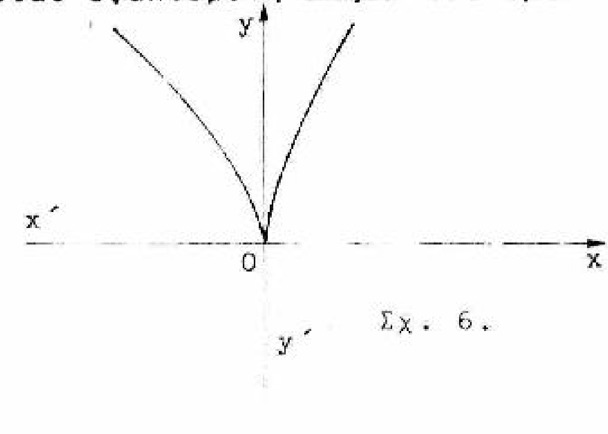
Θέμα 3. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \sqrt{|x|}$ και $g(x) = 1+\sqrt{|x-1|}$ έχουν εφαπτομένες πάνω στο διάγραμμα τους στα αντίστοιχα σημεία $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$.

Απάντηση: Είναι $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

και $f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x} = -\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{-x} = -\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty$

'Αρα το διάγραμμα της f δέχεται εφαπτομένη δεξιά και αριστερά στο σημείο (0,0) και είναι η x = 0 δηλαδή ο άξονας y'y.

'Αρα το διάγραμμα της f στο σημείο (0,0) παρουσιάζει αιχμή (Σχήμα 6).



Σχ. 6.

Για την g έχουμε: $g'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1+\sqrt{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

και $g'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1+\sqrt{-(x-1)}-1}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{-(x-1)}}{-(x-1)} = -\infty$

'Αρα το διάγραμμα της g έχει εφαπτομένη δεξιά και αριστερά του σημείου (1,1) και είναι η ευθεία x = 1.

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x \le 0 \\ x^2-x+1, & x > 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f έχει εφαπτομένη στη θέση $x_0 = 0$.

Λύση: Αν υπάρχει εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 0$ θα έχει εξίσωση $y-f(0) = f'(0)(x-0)$

Είναι όμως: $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-x+1-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x-1)}{x} = -1$

και $f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+1)}{x} = 1$

και επειδή $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ η f δεν έχει παράγωγο στη θέση $x_0 = 0$ επομένως δεν έχει εφαπτομένη στο σημείο αυτό.
Αλλά επειδή οι πλευρικές παράγωγοι στο σημείο $x_0 = 0$ είναι πεπερασμένες η f έχει στο σημείο $x_0 = 0$ ημιεφαπτόμενες αριστερά και δεξιά και έχουν εξισώσεις αντίστοιχα
$y-1 = (x-0) \Leftrightarrow y-x = 1$ και $y-1 = -(x-0) \Leftrightarrow y+x = 1$

Θέμα 5. Δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f με $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2\sqrt{x}$ στο σημείο $x_0 = 0$ είναι $x+y = 1$.

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ του διαγράμματος της f είναι: $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ ή
$y-1 = f'(0)(x-0)$.
Αρκεί επομένως να υπολογίσουμε την παράγωγο $f'(x_0)$.

Είναι $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{x}-1}{x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\eta\mu^2\sqrt{x}}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu^2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = -1.$

'Αρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x_0 = 0$ είναι
$y-1 = -(x-0) \Leftrightarrow x+y = 1$.

Θέμα 6. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2$.

α. Να βρείτε σε ποιό σημείο του διαγράμματος της f η εφα-

πτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 1.

β. Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

γ. Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x'x υπό γωνία φ = 30°.

δ. Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία y = 3x.

ε. Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία 3x-2y+1 = 0.

στ. Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη περνά από το σημείο O(0,0)

ζ) Σε ποιό σημείθ η εφαπτομένη περνά από το σημείο M(1,1).

η) Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $M_1(0,-2)$.

Λύση: α. Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ είναι $\lambda = f'(x_0)$.

Έχουμε: $f'(x) = 6x$ και στη θέση $x = x_0$ είναι $f'(x_0) = 6x_0$

Ώστε $6x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{6}$.

Το ζητούμενο επομένως σημείο είναι $(x_0,f(x_0)) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$

β. Γνωρίζουμε ότι το σημείο x_0 στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα x'x θα έχει συντελεστή διεύθυνσης 0

Άρα $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ και επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το (0,0).

γ. Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x'x υπό γωνία ω τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι λ = εφω.

Δηλαδή $f'(x_0) = εφ30° \Leftrightarrow 6x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt{3}}{18}$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $(\frac{\sqrt{3}}{18}, \frac{1}{36})$

δ. Η εφαπτομένη στο $(x_0,f(x_0))$ και η ευθεία y = 3x έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης αφού θα είναι παράλληλες.

Άρα $f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 6x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$

και επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

ε. Η ευθεία $3x-2y+1 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{3}{2}$

'Αρα πρέπει $f'(x_0)\frac{3}{2} = -1 \Leftrightarrow 6x_0\frac{3}{2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-1}{9}$

και το ζητούμενο σημείο είναι $(\frac{-1}{9}, \frac{1}{27})$.

στ. Για να διέρχεται η εφαπτομένη από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου (0,0) να επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης που είναι

$y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$.

'Αρα έχουμε: $0-3x_0^2 = 6x_0(0-x_0) \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $(x_0, f(x_0)) = (0,0)$

ζ. Για να περνά η εφαπτομένη από το σημείο Μ(1,1) πρέπει οι συντεταγμένες του Μ να επαληθεύουν την εξίσωση

$y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$. Δηλαδή

$1-3x_0^2 = 6x_0(1-x_0) \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0+1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3+\sqrt{6}}{3}, x_0 = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$

Υπάρχουν επομένως δύο εφαπτόμενες στα σημεία

$A(\frac{3+\sqrt{6}}{3}, f(\frac{3+\sqrt{6}}{3})), B = (\frac{3-\sqrt{6}}{3}, f(\frac{3-\sqrt{6}}{3}))$

η. Για να τέμνει η εφαπτομένη τον άξονα y'y στο σημείο $M_1(0,-2)$ πρέπει οι συντεταγμένες του Μ να επαληθεύουν την εξίσωση: $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$. Δηλαδή:

$-2-3x_0^2 = 6x_0(0-x_0) \Rightarrow 3x_0^2-2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

'Αρα υπάρχουν δύο σημεία πάνω στο διάγραμμα της f τα

$A'(\sqrt{\frac{2}{3}}, f(\sqrt{\frac{2}{3}})), B'(-\sqrt{\frac{2}{3}}, f(-\sqrt{\frac{2}{3}}))$.

Θέμα 7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x}$.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Σε συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τους άξονες Ox, Oy και από την (ε).

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ του διαγράμματος της f έχει εξίσωση:

$y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ (1) όπου $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ και $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

Δηλαδή: $y-\frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$ (2) $\Leftrightarrow y+\frac{1}{x_0^2}x-\frac{2}{x_0} = 0$.

Η (2) τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο A με τεταγμένη y = 0 άρα στο σημείο $A(2x_0,0)$ και τον άξονα Oy στο σημείο B με τετμημένη x = 0 άρα στο $B(0,\frac{2}{x_0})$.

Επομένως το εμβαδόν E του τριγώνου OAB είναι $E = \frac{2x_0\frac{2}{x_0}}{2} = 2$ μονάδες μέτρησης.

Θέμα 8. Έστω G η γραφική παράσταση της f με $f(x) = x^2+2$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της G στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ οι οποίες συμπίπτουν με την ευθεία $y = \lambda x+1$. Να δειχτεί ακόμη ότι οι εφαπτόμενες τέμνονται σ'ένα σημείο του άξονα y'y.

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτόμενης της f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y-x_0^2-2 = 2x_0(x-x_0)$ (1) γιατί είναι $f(x_0) = x_0^2-2$ και $f'(x_0) = 2x_0$.

Για να ταυτίζεται η (1) και η $y = \lambda x+1$ πρέπει

$$\frac{2x_0}{\lambda} = 1 = \frac{-x_0^2+2}{1} \Rightarrow \begin{cases}\lambda = 2x_0\\ x_0^2-2 = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 2x_0\\ x_0^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = \pm2\\ x_0 = \pm1\end{cases}$$

Άρα οι εξισώσεις είναι: $y = 2x+1$ και $y = -2x+1$ και τέμνουν τον άξονα y'y στο σημείο (0,1).

Θέμα 9. Εάν A(1,2) και B(3,10) είναι δύο σημεία της γραφικής παράστασης G της f με $f(x) = x^2+1$ να βρεθεί σημείο $M(x_0,y_0)$ της G τέτοιο ώστε η εφαπτομένη σ'αυτό να είναι παράλληλη προς την AB.

Λύση: Θα πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο M να είναι ίσος με τον συντελεστή διεύθυνσης λ_{AB} της AB. Είναι $f'(x_0) = 2x_0$ και $\lambda_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{10-2}{3-1} = 4$.

Άρα $2x_0 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2$. Επομένως το σημείο $M(x_0,y_0)$ είναι το M(2,5).

Θέμα 10. Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = ax^2+\beta x+2$ και $g(x) = \frac{x-1}{x}$. Να προσδιοριστούν τα α,β έτσι ώστε οι γραφι-

κές τους παραστάσεις να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση: Θα πρέπει οι εφαπτόμενες των f και g να συμπίπτουν στο σημείο $x_0 = 1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $x_0 = 1$ είναι:

(ε): $y-f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y-(\alpha+\beta+2) = (2\alpha+\beta)(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\varepsilon)$: $(2\alpha+\beta)x-y-\alpha+2 = 0$.

Και η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο $x_0 = 1$ είναι:

(ε_1): $y-g(1) = g'(1)(x-1) \Rightarrow y-0 = 1(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon_1)$: $x-y-1 = 0$

(γιατί $g'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(1) = 1$)

Άρα επειδή $(\varepsilon) \equiv (\varepsilon_1) \Leftrightarrow \frac{2\alpha+\beta}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{2-\alpha}{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta = 1 \\ \alpha-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -5 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Θέμα 11. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x (\alpha > 0)$.

Να βρείτε για ποιές τιμές του α υπάρχει εφαπτόμενη της f παράλληλη προς την πρώτη διχοτόμο των αξόνων ή και να συμπίπτει προς αυτή.

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ της f είναι: $y-f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$. Αλλά $f(\xi) = \alpha^\xi$ και $f'(\xi) = \alpha^\xi \ln\alpha$ και επομένως για να είναι η εφαπτόμενη παράλληλη προς την πρώτη διχοτόμο της οποίας η εξίσωση είναι $y = x$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$, θα πρέπει $f'(\xi) = 1 \rightarrow \alpha^\xi \ln\alpha = 1$.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν απειράριθμα ζεύγη τιμών των α,ξ για τα οποία η εφαπτόμενη της f είναι παράλληλη της $y = x$. Εάν $\xi = 0$, τότε $\ln\alpha = 1$, άρα $\alpha = e$ και επομένως η εφαπτόμενη στο σημείο $(0, f(0))$ της $f(x) = e^x$, δηλαδή στο σημείο $(0,1)$ της $f(x) = e^x$ είναι παράλληλη της $y = x$.

Για να συμπίπτει η εφαπτόμενη της $f(x) = \alpha^x$, με την $y = x$, θα πρέπει η εξίσωση $y = \alpha^\xi = \alpha^\xi(\ln\alpha)(x-\xi)$ να ταυτίζεται με την $y = x$.

Θα πρέπει να έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha^\xi \ln\alpha = 1 \\ \alpha^\xi - \xi\alpha^\xi \ln\alpha = 0 \end{cases} \text{ με } \alpha^\xi \neq 0 \text{ και } \alpha > 0$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε: $\xi\ln\alpha + \ln(\ln\alpha) = 0$ και α-

πό την δεύτερη $\xi \ln a = 1$. Τελικά βρίσκουμε:
$\ln(\ln a) = -1 \Rightarrow \ln a = e^{-1} \Rightarrow a = e^{e-1}$

Θέμα 12. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2 = R^2$, της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$

Λύση: α) Από την $x^2+y^2 = R^2 \Rightarrow 2x+2yy' = 0$ και επομένως $y' = -\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης του κύκλου στο σημείο $M(x_1, y_1)$ θα είναι συνεπώς: $\lambda = -\frac{x_1}{y_1}$

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι: $y-f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$.

Στην περίπτωσή μας θα έχουμε: $f(x_1) = y_1$ και $f'(\xi) = \lambda = -\frac{x_1}{y_1}$ και επομένως:

$y-y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x-x_1) \Rightarrow yy_1-y_1^2 = -xx_1+x_1^2 \Rightarrow xx_1+yy_1 = x_1^2+y_1^2 = R^2$.

Δηλαδή η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2 = R^2$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$ αυτού δίνεται από τον τύπο $xx_1+yy_1 = R^2$.

β) Από την $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\beta^2} = 1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow 2yy' = \beta^2(-\frac{2x}{a^2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = -\frac{\beta^2}{a^2}\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ και συνεπώς ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης της έλλειψης στο σημείο $M(x_1, y_1)$ θα είναι: $\lambda = -\frac{\beta^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$

Μετά από αυτό η εξίσωση της εφαπτόμενης όπως και προηγουμένως είναι: $y-y_1 = -\frac{\beta^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

Από αυτήν παίρνουμε διαδοχικά:

$yy_1a^2-a^2y_1^2 = -\beta^2xx_1+\beta^2x_1^2 \Rightarrow \beta^2xx_1+a^2yy_1 = \beta^2x_1^2+a^2y_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Ώστε η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$ αυτής δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

γ) Για την υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Βρίσκουμε όμοια όπως παραπάνω ότι ο τύπος της εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1,y_1)$ αυτής είναι: $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

δ) Για την παραβολή $y^2 = 2\rho x$ βρίσκουμε: $yy_1 = \rho(x+x_1)$

Θέμα 13. Έστω σημείο $M(x_0,y_0)$ του διαγράμματος της συνάρτησης f με $f(x) = x^\nu$, όπου $\nu \in Q$, Υποθέτουμε $x_0 > 0$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο M. Εάν μ η προβολή του M στον άξονα των y και T η τομή της εφαπτόμενης στο M με τον άξονα των y, να δειχτεί ότι: $\frac{\vec{OT}}{\vec{O\mu}} = 1-\nu$

(O η αρχή των συντεταγμένων). Να υπολογιστεί στη συνέχεια ο ν, για να είναι το O το μέσο του μT.

Λύση: Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης στο σημείο $M(x_0,y_0)$ είναι $f'(x_0)$.

Έχουμε: $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$

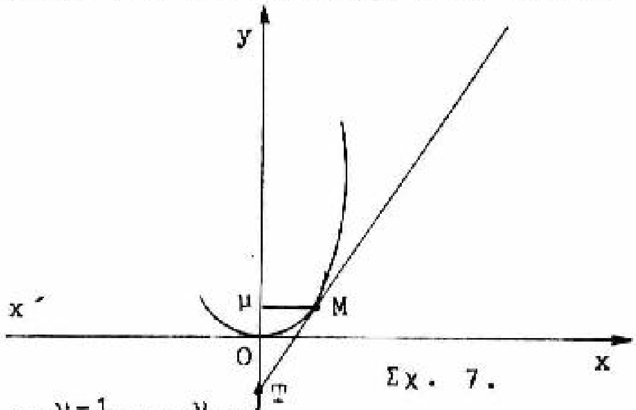
και επομένως:

$f'(x_0) = \nu x_0^{\nu-1}$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι:

$y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

και συνεπώς:



Σχ. 7.

$y-y_0 = \nu x_0^{\nu-1}(x-x_0) \Rightarrow y = \nu x_0^{\nu-1}x-\nu x_0^{\nu}+y_0$

και επειδή $x_0^\nu = y_0$, θα έχουμε τελικά: $y = \nu x_0^{\nu-1}x+(1-\nu)y_0$ (1)

Από την (1) για $x = 0$ θα πάρουμε την τεταγμένη του σημείου T

Βρίσκουμε: $y_T = (1-\nu)y_0 \rightarrow \frac{y_T}{y_0} = 1-\nu$ και επομένως: $\frac{\vec{OT}}{\vec{O\mu}} = 1-\nu$.

Για να είναι το O μέσο του μT, θα πρέπει:

$\frac{\vec{OT}}{\vec{O\mu}} = -1$ και συνεπώς $1-\nu = -1 \Leftrightarrow \nu = 2$.

Αυτό σημαίνει ότι μόνο για την παραβολή $y = f(x) = x^2$ το O είναι μέσον του μT.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο διάγραμμα της f με $f(x) = |x|(x+1)$ στο σημείο $x_0 = 0$

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{5x^2+\alpha x+\beta}{x^2+2x-3}$. Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το διάγραμμα της f να περνά από το σημείο (0,0) και η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -2$ να είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x.

2α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης στο διάγραμμα C της f με $f(x) = \frac{-x^2+4x-2}{5}$ στο σημείο $(1, \frac{1}{5})$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$.

i) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε η καμπύλη C_1 να περνά από το σημείο A(1,1) και η ευθεία $x+y+1 = 0$ να εφάπτεται στο διάγραμμα της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -3$.

ii) Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_1 που είναι παράλληλη με την ευθεία $x-4y = 0$.

iii) Να κατασκευαστεί η καμπύλη C_2 με εξίσωση $\varphi(x) = -\frac{\kappa x+\lambda}{\mu x+\rho}$ έτσι ώστε να έχει ασύμπτωτη τον άξονα Ox και την ευθεία $x+y+4 = 0$ εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = -1$.

iv) Να εξετάσετε αν η C_2 περνά από το σημείο A και να βρεθούν τότε οι εφαπτόμενες των C_1, C_2 στο A.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2$ και έστω ότι η εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0,y_0)$ τέμνει τον x΄x και y΄y στα σημεία A και B αντίστοιχα.

Έστω ακόμη Γ το σημείο τομής της κάθετης στο M και τον άξονα y΄y. Να βρεθεί ο γ. τόπος που γράφει το μέσο P του τμήματος AB όταν το M κινείται πάνω στην f.

5. Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τις κάθετες στο διάγραμμα της f με $f(x) = x^2-4x+5$ και της ευθείας $x-y+1 = 0$.

6. Δείξετε ότι οι κάθετες της παραβολής $f(x) = x^2-x+1$ στα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = -1$ και $x_2 = \frac{5}{2}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2-|2x-1|$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της f στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

8. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+\kappa x+\lambda$. Να βρεθούν τα α, $\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \alpha x$ να εφάπτεται στο διάγραμμα της f στο σημείο M(1,2) αυτής και ο συντελεστής κλίσεως της $y = \alpha x$ να είναι 4.

9. Έστω οι συναρτήσεις f με $f(x) = \kappa x^2+\lambda x+4$ και g με $g(x)= = \frac{x-3}{x+1}$. Να προσδιοριστούν τα $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $\xi = 1$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο διάγραμμα C της f που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{\pi}{4}$.

11. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f να περνά από τα σημεία A(0,-3) και B(2,0) και οι εφαπτόμενες σ'αυτά να έχουν κλίσεις αντίστοιχα 3 και 2.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)$ και $g(x) = x(x-1)\ldots(x-\nu)(x-\nu-1)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Δείξετε ότι έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάποιο από τα κοινά σημεία τους.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$

Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε οι εφαπτόμενες στα σημεία με τετμημένες $\pm x_0$, $\pm x_1$ με $x_0 \neq \pm x_1$ είναι παράλληλες.

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+2$. Δείξετε ότι η κάθετη στο διάγραμμα της f με τετμημένη $x = c > 0$ σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $\alpha(\alpha^2+\frac{5}{2})^2$.

15. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x_0 = 3$ και να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει αυτή με τον άξονα x΄x.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Σε προβλήματα στα οποία θέλουμε να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f εργαζόμαστε με τους παρακάτω τρόπους.

i) Αν ζητείται η παράγωγος στο σημείο x_0 σ. συσσωρεύσεως

του πεδίου ορισμού της f και εσωτερικό του $\mathcal{D}(f)$ τότε ή βρίσκουμε τον παράγωγο αριθμό με τον ορισμό ή βρίσκουμε την παράγωγο της f με την χρήση των ιδιοτήτων και στη σχέση που βρίσκουμε θέτουμε όπου x το x_0.

ii) Αν το $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ και είναι άκρο κάποιου διαστήματος του $\mathcal{D}(f)$ ή είναι σημείο ένωσης δύο διαστημάτων του $\mathcal{D}(f)$ τότε πάντοτε βρίσκουμε τις πλευρικές παραγώγους στο x_0 και μόνο με τον ορισμό.

iii) Αν ζητείται να βρεθεί η παράγωγος της f στο τυχαίο σημείο $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ τότε εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των παραγώγων ή αν αυτό δεν είναι δυνατό μετασχηματίζουμε τον τύπο της f κατάλληλα ώστε να του δώσουμε μια από τις μορφές $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ή $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ οπότε αν πάρουμε τα όρια των μελών δημιουργείται η παράγωγος της f στο ένα μέλος και μένει να υπολογιστεί το όριο του άλλου μέλους.
Πολλές φορές αν ο τύπος της f μετατρέπει το άθροισμα δύο μεταβλητών σε κάτι άλλο τότε κάνουμε απ' ευθείας χρήση του τύπου $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ή παραγωγίζουμε τα μέλη της δοσμένης σχέσης.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-x^2-2x+4$.
Να εξετάσετε αν η f παραγωγίζεται στην θέση $\xi = 1$.

Λύση: 1ος τρόπος με τον ορισμό.

Είναι $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-2x+4-1^3+1^2+2-4}{x-1} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)(x+1)-2(x-1)}{x-1} =$

$= \lim_{x\to 1}[x^2+x+1-(x+1)-2] = -1.$

Άρα υπάρχει η παράγωγος στη θέση $\xi = 1$ και είναι $f'(1)=-1$

2ος τρόπος με ιδιότητες.

Επειδή το σημείο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathcal{D}(f)$ βρίσκουμε την παράγωγο της f κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων και έχουμε: $f'(x) = 3x^2-2x-2$ (1) και αν θέσουμε στα μέλη της (1) όπου $x = 1$ έχουμε $f'(1) = 3-4 = -1$.

Θέμα 2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{|x-1|+2}$

Να βρείτε αν υπάρχει η παράγωγος της στη θέση ξ = 1.

Λύση: Γράφουμε την f με πολλαπλό τύπο

i) Αν $x \geq 1 \Rightarrow f(x) = e^{x-1+2} = e^{x+1}$

ii) Αν $x < 1 \Rightarrow f(x) = e^{-x+1+2} = e^{-x+3}$

Δηλαδή: $f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \geq 1 \\ e^{-x+3}, & x < 1 \end{cases}$

με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$.

Επειδή δε το σημείο ξ = 1 είναι σημείο ένωσης του $\mathcal{D}(f)$ θα βρούμε πλευρικές παραγώγους της f στο σημείο 1 με τον ορισμό.

Είναι: $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{x+1}-e^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{x-1+2}-e^2}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^2(e^{x-1}-1)}{x-1} = e^2$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} = 1$ και

$f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{-x+3}-e^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{-(x-1)+2}-e^2}{x-1} =$

$= e^2 \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{-(x-1)}-1}{x-1} = e^2 \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\frac{1}{e^{x-1}}-1}{x-1} = -e^2 \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}(x-1)} = -e^2$

Επειδή δε είναι $f'(1^+) \neq f'(1^-)$ η f δεν παραγωγίζεται στην θέση ξ = 1.

Θέμα 3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x[x]$ (όπου $[x]$ = ακέραιο μέρος του x). Να εξετάσετε αν έχει παράγωγο στην θέση ξ = 0.

Λύση: Επειδή $0 \in (-1, 1)$ θα βρούμε πλευρικές παραγώγους στο σημείο ξ = 0.

Είναι: $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x[x]-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} [x] = 0$

γιατί $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

και $f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x[x]-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} [x] = -1$

γιατί $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1$

Άρα η f δεν έχει παράγωγο στην θέση ξ = 0.

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^3(4+\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}), & x > 0 \\ -x^3, & x \le 0 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν έχει παράγωγο στη θέση $\xi = 0$.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$ και επειδή το σημείο μηδέν είναι σημείο ένωσης του $\mathcal{D}(f)$ θα βρούμε τις πλευρικές παράγωγους στο σημείο $\xi = 0$.

Είναι $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3(4+\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x})-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2(4+\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}) \le$

$\le \lim\limits_{x\to 0^+} x^2(|4|+|\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}|) \le 5\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 \Rightarrow f'(0^+) = 0$

και $f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^3-0}{x} = -\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0.$

Άρα η f έχει παράγωγο στην θέση $\xi = 0$

Θέμα 5. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = |x^5-x|$ και $g(x) = \min\{\sigma\upsilon\nu x, \eta\mu x\}$ με $\mathcal{D}(g) = [0, \pi/2]$.
Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

Λύση: Η f έχει πολλαπλό τύπο και είναι:

$$f(x) = \begin{cases} x^5-x, & x \ge 1 \text{ ή } -1 \le x < 0 \\ -x^5+x, & 0 \le x < 1 \text{ ή } x < -1 \end{cases}$$

Έχει δε $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup [-1, 0) \cup [0, 1) \cup [1, +\infty)$

Προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ αντίστοιχα $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ και η παράγωγός της είναι $f'(x) = -5x^4+1$ αντίστοιχα $f'(x) = 5x^4-1$.

Μένει επομένως να δούμε αν παραγωγίζεται στα σημεία $-1, 0, 1$ και επειδή είναι σημεία ένωσης του $\mathcal{D}(f)$ θα βρούμε πλευρικές παραγώγους σ'αυτά.

Είναι $f'(-1^+) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^5-x-0}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x+1} = 4$

$f'(-1^-) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-x^5+x}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-x(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x+1} = -4$

Άρα η f δεν έχει παράγωγο στην θέση -1.

Όμοια $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^5+x-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x^4+1) = 1$

$f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^5-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^4-1) = -1$

'Αρα η f δεν έχει παράγωγο και στη θέση 0.

Επίσης $f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^5-x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x(x+1)(x^2+1) = 4$

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^5+x}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-} x(x+1)(x^2+1) = -4$

Συνεπώς η f δεν έχει παράγωγο και στη θέση 1.

Ο τύπος της g είναι: $g(x) = \frac{ημx+συνx-|ημx-συνx|}{2}$ και αν

$ημx \geq συνx \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow f(x) = συνx$ αν δε

$ημx < συνx \Rightarrow x \in [0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow f(x) = ημx$.

'Αρα η $g(x) = \begin{cases} ημx, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ συνx, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Προφανώς η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{4})$ και $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ και η παράγωγος της είναι $g'(x) = συνx$ αντίστοιχα $g'(x) = -ημx$.

Μένει επομένως να δούμε αν η g παραγωγίζεται στη θέση $\frac{\pi}{4}$ άρα θα βρούμε τις πλευρικές παραγώγους στο $\frac{\pi}{4}$.

$$\text{Είναι } f'(\frac{\pi}{4}^+) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{συνx-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{συνx-συν\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{-2ημ(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})ημ(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{ημ(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} ημ(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}) = -1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{και } f'(\frac{\pi}{4}^-) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{ημx-ημ\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{2συν(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})ημ(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{x-\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{ημ(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} συν(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}) = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

'Αρα η f δεν παραγωγίζεται στη θέση $x = \frac{\pi}{4}$.

Θέμα 6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g(x)$ με $g(\alpha) \neq 0$. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = |x-\alpha| g(x)$. Δεν παραγωγίζεται στην θέση $x = \alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση: Η f γράφεται με πολλαπλό τύπο ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} (x-\alpha)g(x), & x \geq \alpha \\ -(x-\alpha)g(x), & x < \alpha \end{cases}$$

και έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = (-\infty, \alpha) \cup [\alpha, +\infty)$.
Επειδή το σημείο $x = \alpha$ είναι σημείο ένωσης του $\mathcal{D}(f)$ θα βρούμε τις πλευρικές παραγώγους στο σημείο $x = \alpha$.

Είναι $f'(\alpha^+) = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{(x-\alpha)g(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{(x-\alpha)g(x) - 0}{x-\alpha} =$
$= \lim_{x \to \alpha^+} g(x) = g(\alpha)$ γιατί η f είναι συνεχής επομένως ισχύει
$\lim_{x \to \alpha^+} g(x) = g(\alpha)$

και $f'(\alpha^-) = \lim_{x \to \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x \to \alpha^-} \frac{-(x-\alpha)g(x) - 0}{x-\alpha} =$
$= -\lim_{x \to \alpha^-} g(x) = -g(\alpha)$.

Επειδή δε $f'(\alpha^+) \neq f'(\alpha^-)$ συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει παράγωγο στην θέση $x = \alpha$.

Θέμα 7. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \max\{x, x^2, x^3\}, & x \in (-\infty, 0) \\ \min\{x, x^2, x^3\}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Να βρεθεί η παράγωγος συνάρτηση της f.

Λύση: Αν είναι $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$ και $x^3 < 0$ οπότε $\max\{x, x^2, x^3\} = x^2$. Αν είναι $0 \leq x < 1 \Rightarrow x > x^2 > x^3$ οπότε $\min\{x, x^2, x^3\} = x^3$ και αν είναι $x \geq 1 \Rightarrow x^3 > x^2 > x \Rightarrow \min\{x, x^2, x^3\} = x$

'Αρα η f γράφεται: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \end{cases}$

και έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup [0, 1) \cup [1, +\infty)$
Είναι δε παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα ανοιχτά διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ με παραγώγους αντίστοιχα $f'(x) = 2x$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(x) = 1$. Μένει επομένως να δούμε αν υπάρχει η παράγωγος της στα σημεία 0 και 1. 'Αρα θα

βρούμε τις πλευρικές παραγώγους σ'αυτά.

Είναι $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^3-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ και

$f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ και επειδή $f'(0^+) = f'(0^-)$ υπάρχει η παράγωγος της f στο μηδέν. Στο 1 έχουμε:

$f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$ και $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x+1) = 3$ και επειδή $f'(1^+) \neq f'(1^-)$ η f δεν παραγωγίζεται στην θέση $x = 1$. 'Αρα η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}-\{1\}$ και έχει παράγωγο συνάρτηση την

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 3x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$

Θέμα 8. Να εξετάσετε αν η f με $f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \leq 3 \\ x^2+1, & x > 3 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 3$.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 3] \cup (3, +\infty)$ και το σημείο 3 είναι σ. συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$. Επειδή η f στην περιοχή του 3 ορίζεται με διαφορετικούς τύπους θα βρούμε τις πλευρικές παραγώγους στην θέση $x_0 = 3$.

Είναι $f'(3^+) = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2+1-2\cdot 3^3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-53}{x-3} =$

$= -\infty$ και $f'(3^-) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{2x^3-2\cdot 3^3}{x-3} =$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{2(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = 54$

Επειδή οι πλευρικές παράγωγοι στο 3 είναι διαφορετικές δεν υπάρχει η παράγωγος στη θέση $x_0 = 3$.

Θέμα 9. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στην θέση $x_0 = 0$.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \cup \{0\}$ και το μηδέν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$.

Είναι $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\eta\mu\frac{1}{x}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu\frac{1}{x}$

Αλλά η συνάρτηση ημ$\frac{1}{x}$ δεν έχει όριο στο 0 (Βλέπετε άσκηση στα όρια). Επομένως η f δεν έχει παράγωγο στην θέση $x_0 = 0$

Θέμα 10. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^3 ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ **είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 0$.**

Λύση: Η f έχει $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \cup \{0\}$ και το 0 είναι σ. συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$.

Είναι $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 ημ\frac{1}{x} - 0}{x - 0} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0$ γιατί $|x^2 ημ\frac{1}{x}| = |x^2|\,|ημ\frac{1}{x}| \leq x^2 \to 0$.

Άρα υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση $x_0 = 0$.

Θέμα 11. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$
Δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν παραγωγίζεται στη θέση $x_0 = 0$.

Λύση: Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ τότε είναι $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi} \sqrt[5]{x^3} =$
$= \sqrt[5]{(\lim\limits_{x \to \xi} x)^3} = \sqrt[5]{\xi^3}$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = (x^{\frac{3}{5}})' = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5} - 1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} =$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ και στη θέση $x_0 = 0$ δεν ορίζεται η

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$.

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στη θέση $x_0 = 0$.

Θέμα 12. Δίνεται η συνάρτηση f $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3|x| + 4x$.
Δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

Λύση: Η f έχει τον πολλαπλό τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 7x, & x > 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχει παράγωγο και είναι $f'(x) = 7$ επίσης στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχει παράγωγο και είναι $f'(x) = 1$

Άρα η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}^*$.

Θέμα 13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-5x+6}$. Να βρεθεί η παράγωγος της στη θέση x = 2 και x = -3.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}: x-2 \geq 0, x^2-5x+6 \geq 0\} = \{x \geq 2, x \geq 3 \text{ ή } x \leq 2\} = \{2\} \cup [3,+\infty)$.
Επειδή το 2 είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{D}(f)$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f στην θέση x = 2.
Επειδή το $-3 \notin \mathcal{D}(f)$, επίσης δεν υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση x = -3.

Θέμα 14. Θεωρούμε την συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x \in [0,1] \\ x^5, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση πρώτη παράγωγος και η συνάρτηση δεύτερη παράγωγος.

Λύση: Στο διάστημα (0,1) είναι $f'(x) = 4x^3 \ \forall \ x \in (0,1)$ και στο διάστημα $(1,+\infty)$ είναι $f'(x) = 5x^4 \ \forall x \in (1,+\infty)$.
Εξετάζουμε αν υπάρχει η παράγωγος (δεξιά) στο μηδέν

Είναι $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$

Άρα $\forall \ x \in [0,1)$ είναι $f'(x) = 4x^3$.
Εξετάζουμε αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι στο 1.

Έχουμε $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^5-1}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^4+x^3+x^2+x+1) = 5$

και $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^3+x^2+x+1) = 4$

Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση x = 1.
Συνεπώς η παράγωγος συνάρτηση ορίζεται στα διαστήμα [0,1) και $(1,+\infty)$ και έχει τύπο

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \in [0,1) \\ 5x^4, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

Αν εργαστούμε όπως παραπάνω βρίσκουμε την συνάρτηση δεύτερης παραγώγου που είναι:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 20x^3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Σημείωση: Είναι $\mathcal{D}(f) = [0,+\infty)$ και $\mathcal{D}(f') = [0,+\infty)-\{1\}$

Θέμα 15. Θεωρούμε την συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τα f'(0) και f''(0) αν υπάρχουν.

Λύση: Αν $x \neq 0$ είναι

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x} - \xi^2\eta\mu\frac{1}{\xi} + x^2\eta\mu\frac{1}{\xi} - x^2\eta\mu\frac{1}{\xi}}{x-\xi} =$$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{x^2(\eta\mu\frac{1}{x} - \eta\mu\frac{1}{\xi})}{x-\xi} + \lim_{x\to\xi}\frac{\eta\mu\frac{1}{\xi}(x^2-\xi^2)}{x-\xi} =$$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{x^2 2\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{\xi}}{2}\eta\mu\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}}{2}}{x-\xi} + \lim_{x\to\xi}\eta\mu\frac{1}{\xi}(x+\xi) =$$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{x+\xi}{2x\xi}\eta\mu\frac{x-\xi}{2x\xi}}{\frac{x-\xi}{2x\xi}x\xi} + 2\xi\eta\mu\frac{1}{\xi} = -\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi} + 2\xi\eta\mu\frac{1}{\xi} \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^*$$

Άρα $f'(x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ είναι η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου για $x \neq 0$

και $f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to0}x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$

Επομένως είναι $f'(0) = 0$ και η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου έχει τύπο

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Για την δεύτερη παράγωγο στο 0 έχουμε:

$$f''(0) = \lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} - 0}{x} =$$

$= \lim_{x\to0}2\eta\mu\frac{1}{x} - \lim_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{x}$ το οποίο δεν υπάρχει.

Άρα η f δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.

Θέμα 16. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2-x+2, & x \le 1 \\ \dfrac{x^2+\lambda x+3-\lambda}{x+1}, & x > 1 \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση x = 1.

Λύση: Θα πρέπει $f'(1^-) = f'(1^+)$

Αλλά $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-x+2-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$

και $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\dfrac{x^2+\lambda x+3-\lambda}{x+1}-2}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+\lambda x+3-\lambda-2x-2}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x^2-1)+\lambda(x-1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x+1+\lambda-2)}{x+1} = \dfrac{\lambda}{2}$

Επομένως θα είναι $\dfrac{\lambda}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Και τότε θα έχουμε $f'(1) = 1$.

Θέμα 17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 2 \\ \alpha x+\beta, & x > 2 \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα πραγματικά α και β ώστε η f να έχει παράγωγο στην θέση $x_0 = 2$.

Λύση: 1ος τρόπος. Επειδή η f έχει παράγωγο στην θέση $x_0 =$ $= 2$ είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Επομένως είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}(\alpha x+\beta) =$

$= \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+1) = 2^2+1 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta = 5 \quad (1)$

Επίσης επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = -2$ ισχύει: $f'(2^+) = f'(2^-) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\alpha x+\beta-5}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+1-5}{x-2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\alpha x+\beta-5}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}(x+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\alpha x+\beta-5}{x-2} = 4 \quad (2)$

Η (2) λόγω της (1) γίνεται: $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\alpha x+5-2\alpha-5}{x-2} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\alpha(x-2)}{x-2} = 4 \Rightarrow \alpha = 4 \quad (3)$

Η (1) λόγω της (3) δίνει $\beta = -3$

Άρα αν $\alpha = 4$ και $\beta = -3$ η f είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$.

2ος τρόπος. Θα πρέπει $f'(2^+) = f'(2^-)$ (1)

Αλλά $f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\alpha x+\beta-5}{x-2} = \frac{2\alpha+\beta-5}{0^+} = \pm\infty$ αν $2\alpha+\beta-5 \neq 0$

Αλλά τότε η f δεν θα ήταν παραγωγίσιμη στο 2 οπότε είναι $2\alpha+\beta-5 = 0$ (2) και είναι:

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\alpha x-2\alpha+2\alpha+\beta-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\left[\alpha+\frac{2\alpha+\beta-5}{x-2}\right] = \alpha \quad (3)$$

Επίσης $f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$

$= \lim_{x\to 2^-}(x+2) = 4$ (4)

Από τις (3) και (4) έχουμε $\alpha = 4$ και από την (2) με $\alpha = 4$ παίρνουμε $\beta = -3$.

Θέμα 18. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{x^2-3x+3+(x^2+\alpha x+\beta)4^{\nu^2 x}}{1+4^{\nu^2 x}}$$

Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Λύση: Θα πρέπει να βρούμε τον τύπο της f άρα θα πρέπει να βρούμε το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{x^2-3x+3+(x^2+\alpha x+\beta)4^{\nu^2 x}}{1+4^{\nu^2 x}}$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού x.

Έχουμε: i) Αν $x = 0 \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{3+\beta}{2} \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = \frac{3+\beta}{2}$

ii) Αν $x > 0 \Rightarrow 4^{\nu^2 x} \to +\infty \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu =$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \frac{4^{\nu^2 x}\left(\frac{x^2-3x+3}{4^{\nu^2 x}}+x^2+\alpha x+\beta\right)}{4^{\nu^2 x}\left(\frac{1}{4^{\nu^2 x}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \frac{\frac{x^2-3x+3}{4^{\nu^2 x}+1}+x^2+\alpha x+\beta}{\frac{1}{4^{\nu^2 x}}+1} = x^2+\alpha x+\beta.$$

iii) Αν $x < 0 \Rightarrow 4^{\nu^2 x} \to 0 \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = x^2-3x+3$

Άρα η f έχει πολλαπλό τύπο τον

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3+\beta}{2}, & x = 0 \\ x^2+\alpha x+\beta, & x > 0 \\ x^2-3x+3, & x < 0 \end{cases}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και στο μηδέν άρα θα ισχύουν οι σχέσεις:

1. Η f συνεχής στο μηδέν δηλαδή:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

2. Η f παραγωγίσιμη στο μηδέν δηλαδή:

$f'(0^+) = f'(0^-)$

Είναι δε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+\alpha x+\beta) = \beta$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2-3x+3) =$

$= 3$ και $f(0) = \frac{3+\beta}{2}$. Άρα είναι $\beta = 3$ (I)

Όμοια είναι: $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+\alpha x+\beta-\frac{\beta+3}{2}}{x} \overset{(I)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+\alpha x}{x} = \alpha$

και $f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-3x+3-\frac{\beta+3}{2}}{x} \overset{(I)}{=} \lim_{x\to 0^-}(x-3) = -3$.

Άρα $\alpha = -3$.

Επομένως τα ζητούμενα α,β είναι $\alpha = -3$, $\beta = 3$.

Ένας άλλος τρόπος λύσης βλέπετε άσκηση (17).

Θέμα 19. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = 5+x+x^{\nu}+\sqrt{x}+e^{x}-\alpha^{x}+\ln x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x$
2. $h(x) = \eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x+\ln x$
3. $g(x) = \alpha^{x}\beta^{x}/\ \alpha,\beta > 0$

Λύση: 1. Η f είναι άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα θα βρούμε την παράγωγο συνάρτηση στο τυχαίο σημείο x_0, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες.

Έχουμε: $f'(x) = (5)'+(x)'+(x^{\nu})'+(\sqrt{x})'+(e^{x})'-(\alpha^{x})'+(\ln x)'+$
$+(\eta\mu x)'+(\sigma\upsilon\nu x)'+(\varepsilon\varphi x)'-(\sigma\varphi x)' =$

$= 0+1+\nu x^{\nu-1}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{x}-\alpha^{x}\ln\alpha+\frac{1}{x}+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

2. Όμοια η h είναι άθροισμα συναρτήσεων που έχουν παράγωγους. Επομένως είναι:

$h'(x) = (\eta\mu x)'+(x\sigma\upsilon\nu x)'+(\ln x)' = \sigma\upsilon\nu x+(x\sigma\upsilon\nu x)'+\frac{1}{x}$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = x\sigma\upsilon\nu x$ είναι γινόμενο επομένως είναι:

$\varphi'(x) = (x)'\sigma\upsilon\nu x+x(\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$.

Τελικά έχουμε: $h'(x) = \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+\frac{1}{x} =$

$= 2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+\frac{1}{x}$.

3. Η g είναι γινόμενο συναρτήσεων. Οπότε:

$g'(x) = (\alpha^x\beta^x)' = (\alpha^x)'\beta^x+\alpha^x(\beta^x)' = \alpha^x ln\alpha\beta^x+\alpha^x\beta^x ln\beta =$
$= \alpha^x\beta^x(ln\alpha+ln\beta) = \alpha^x\beta^x ln\alpha\beta.$

Θέμα 20. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = e^x lnx$
2. $h(x) = xln(\sigma\upsilon\nu x)$
3. $g(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$
4. $\varphi(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

Λύση: 1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_+^*$ και επειδή είναι γινόμενο συναρτήσεων έχουμε:

$f'(x) = (e^x lnx)' = (e^x)'lnx+e^x(lnx)' = e^x lnx+e^x \frac{1}{x} =$

$= e^x(lnx+\frac{1}{x}).$

2. Όμοια είναι: $h'(x) = [xln(\sigma\upsilon\nu x)]' = ln(\sigma\upsilon\nu x)+$
$+x[ln(\sigma\upsilon\nu x)]' = ln(\sigma\upsilon\nu x)+x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x)' =$

$= ln(\sigma\upsilon\nu x)-\frac{x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = ln(\sigma\upsilon\nu x)-x\varepsilon\varphi x.$

3. Η g είναι σύνθετη συνάρτηση άρα έχουμε:
$g'(x) = [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)]' = \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)(\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)(-\eta\mu x) =$
$= -\eta\mu x\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x).$

4. Όμοια η φ είναι σύνθετη συνάρτηση άρα έχουμε:
$\varphi'(x) = (\sqrt{x+\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}((x)'+(\sqrt{x})') =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$

Θέμα 21. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \eta\mu^4(\sigma\upsilon\nu x+e^x+\sqrt{x})$
2. $g(x) = \frac{x^2e^{x^2+1}}{1+\eta\mu x}$
3. $h(x) = 3\eta\mu^4(2x+1)+\sigma\upsilon\nu^5x+\varepsilon\varphi(4x+1)$

Λύση: 1. Η f είναι σύνθετη συνάρτηση
Άρα $f'(x) = [\eta\mu^4(\sigma\upsilon\nu x+e^x+\sqrt{x})]' =$
$= 4\eta\mu^3(\sigma\upsilon\nu x+e^x+\sqrt{x})(\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+e^x+\sqrt{x}))' =$

$= 4\eta\mu^3(\sigma\upsilon\nu x+e^x+\sqrt{x})\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x+e^x+\sqrt{x})(\sigma\upsilon\nu x+e^x+\sqrt{x})' =$

$= 4\eta\mu^3(\sigma\upsilon\nu x+e^x+\sqrt{x})\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x+e^x+\sqrt{x})(-\eta\mu x+e^x+\frac{1}{2\sqrt{x}})$

2. Η g είναι πηλίκο συναρτήσεων άρα:

$g'(x) = \frac{(x^2e^{x^2+1})'(1+\eta\mu x)-x^2e^{x^2+1}(1+\eta\mu x)'}{(1+\eta\mu x)^2} =$

$= \frac{[(x^2)'e^{x^2+1}+x^2(e^{x^2+1})'](1+\eta\mu x)-x^2e^{x^2+1}\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2} =$

$= \frac{[2x\ e^{x^2+1}+x^2e^{x^2+1}(x^2+1)'](1+\eta\mu x)-x^2e^{x^2+1}\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2} =$

$= \frac{(2xe^{x^2+1}+x^2e^{x^2+1}2x)(1+\eta\mu x)-x^2e^{x^2+1}\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2} =$

$= \frac{e^{x^2+1}[(2x+2x^3)(1+\eta\mu x)-x^2\sigma\upsilon\nu x]}{(1+\eta\mu x)^2}$

3. Έχουμε: $h'(x) = [3\eta\mu^4(2x+1)+\sigma\upsilon\nu^5x+\varepsilon\varphi(4x+1)]' =$

$=[3\eta\mu^4(2x+1)]'+(\sigma\upsilon\nu^5x)'+[\varepsilon\varphi(4x+1)]' =$

$= 3\cdot4\eta\mu^3(2x+1)(\eta\mu(2x+1))' +5\sigma\upsilon\nu^4x(\sigma\upsilon\nu x)'+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(4x+1)}(4x+1)' =$

$= 12\eta\mu^3(2x+1)\sigma\upsilon\nu(2x+1)2-5\sigma\upsilon\nu^4x\eta\mu x+\frac{4}{\sigma\upsilon\nu^2(4x+1)}$

Θέμα 22. Αν $F(x) = f(\eta\mu^2x)+f(\sigma\upsilon\nu^2x) \Rightarrow F'(x) =$ $= \eta\mu2x(f'(\eta\mu^2x)-f'(\sigma\upsilon\nu^2x))$.

Λύση: Η f είναι άθροισμα σύνθετων συναρτήσεων και αν παραγωγίσουμε έχουμε:

$F'(x) = [f(\eta\mu^2x)]'+[f(\sigma\upsilon\nu^2x)]' = f'(\eta\mu^2x)(\eta\mu^2x)'+$

$+f'(\sigma\upsilon\nu^2x)(\sigma\upsilon\nu^2x)' = f'(\eta\mu^2x)2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+f'(\sigma\upsilon\nu^2x)(-2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x)=$

$= \eta\mu2x(f'(\eta\mu^2x)-f'(\sigma\upsilon\nu^2x))$.

Θέμα 23. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2x)+\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2x)$ και της $g(x) = f(\ln^2x)+$ $+h(\log_\alpha^2x)$.

Λύση: Η f είναι άθροισμα σύνθετων συναρτήσεων επομένως έχουμε:

$f'(x) = \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu^2x)(\sigma\upsilon\nu^2x)'-\eta\mu(\eta\mu^2x)(\eta\mu^2x)' =$

$= -2\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu^2x)\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x-2\eta\mu(\eta\mu^2x)\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x =$

$= -\eta\mu2x(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu^2x)+\eta\mu(\eta\mu^2x))$.

'Ομοια η g είναι άθροισμα σύνθετων συναρτήσεων επομένως έχουμε:

$g'(x) = f'(\ln^2 x)(\ln^2 x)' + h'(\log_\alpha^2 x)(\log_\alpha^2 x)' =$

$= f'(\ln^2 x)2\ln x(\ln x)' + h'(\log_\alpha^2 x)2\log_\alpha x(\log_\alpha x)' =$

$= \frac{2f'(\ln^2 x)\ln x}{x} + 2h(\log_\alpha^2 x)\log_\alpha x \frac{1}{x\log\alpha}$

θέμα 24. Να βρεθεί η παράγωγος κάθε συνάρτησης

1. $f(x) = 5\eta\mu x\ln x\varepsilon\varphi x - (x+1)^3$
2. $h(x) = \eta\mu(3x+1) + \sigma\upsilon\nu^3(4x^2)$
3. $g(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x)$
4. $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Λύση: 1. Είναι $f'(x) = (5\eta\mu x\ln x\varepsilon\varphi x)' - [(x+1)^3]' =$

$= 5(\eta\mu x)'\ln x\varepsilon\varphi x + 5\eta\mu x(\ln x)'\varepsilon\varphi x + 5\eta\mu x\ln x(\varepsilon\varphi x)' - 3(x+1)^2(x+1)' =$

$= 5\sigma\upsilon\nu x\ln x\varepsilon\varphi x + 5\eta\mu x\frac{1}{x}\varepsilon\varphi x + 5\eta\mu x\ln x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3(x+1)^2$

2. $h'(x) = [\eta\mu(3x+1)]' + [\sigma\upsilon\nu^3(4x^2)]' =$

$= \sigma\upsilon\nu(3x+1)(3x+1)' + 3\sigma\upsilon\nu^2(4x^2)(\sigma\upsilon\nu(4x^2))' =$

$= \sigma\upsilon\nu(3x+1)3 + 3\sigma\upsilon\nu^2(4x^2)(-\eta\mu(4x^2))(4x^2)' =$

$= 3\sigma\upsilon\nu(3x+1) - 24x\sigma\upsilon\nu^2(4x^2)\eta\mu(4x^2).$

3. Είναι $g'(x) = [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2 x)]'\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x) + \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2 x)[\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x)]' =$

$= \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu^2 x)(\sigma\upsilon\nu^2 x)'\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x) + \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2 x)(-\eta\mu(\eta\mu^2 x))(\eta\mu^2 x)' =$

$= \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu^2 x)(-2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x) + \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2 x)(-\eta\mu(\eta\mu^2 x)).$

$(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x) = -2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x[\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x) + \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2 x)$

$\eta\mu(\eta\mu^2 x)] = -\eta\mu 2x(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x)) = -\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu 2x)$

4. 'Εχουμε παράγωγο πηλίκου και είναι:

$\varphi(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{(e^{2x}-1)'(e^{2x}+1) - (e^{2x}-1)(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2}$

$= \frac{e^{2x}(2x)'(e^{2x}+1) - (e^{2x}-1)e^{2x}(2x)'}{(e^{2x}+1)^2} =$

$= \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

θέμα 25. 'Εστω οι συναρτήσεις f και g. Αν $f(x) = g(e^{4x})$ και η g έχει παράγωγο δεύτερης τάξης να βρείτε την δεύτερη

παράγωγο της f.

Λύση: Είναι: $f'(x) = g'(e^{4x})(e^{4x})' = 4e^{4x}g'(e^{4x})$

και αν παραγωγίσουμε άλλη μια φορά έχουμε:

$f''(x) = 4e^{4x}(4x)'g'(e^{4x})+4e^{4x}g''(e^{4x})(e^{4x})' =$

$= 16e^{4x}g'(e^{4x})+16e^{8x}g''(e^{4x}) = 16e^{4x}\left[g'(e^{4x})+e^{4x}g''(e^{4x})\right].$

Θέμα 26. Να βρεθεί η παράγωγος κάθε μιας από τις συναρτήσεις

1. $f(x) = x^x$
2. $h(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$
3. $g(x) = (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$
4. $\varphi(x) = (x^2+1)^{x^3}$

Λύση: 1. 1ος τρόπος. Η f γράφεται $f(x) = e^{x\ln x} \rightarrow$

$f'(x) = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = e^{x\ln x}(\ln x+x\frac{1}{x}) =$

$= x^x(\ln x+1).$

2ος τρόπος: Επειδή πρέπει $x>0$ αν λογαριθμίσουμε τα μέλη έχουμε: $\ln f(x) = x\ln x \Rightarrow (\ln f(x))' = (x\ln x)' \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x+1 \Rightarrow f'(x) = x^x(\ln x+1)$

2. Είναι $h(x) = e^{\sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x)} \Rightarrow h'(x) =$

$= e^{\sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x)}(\sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x))' =$

$= (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}(-\eta\mu x\ln(\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x)$

2ος τρόπος. Είναι: $\eta\mu x>0$ οπότε με λογαρίθμιση των μελών έχουμε:

$\ln(h(x)) = \sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x) \Rightarrow [\ln(h(x))]' =$

$= [\sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x)]' \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{h'(x)}{h(x)} = -\eta\mu x\ln(\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}(-\eta\mu x\ln(\eta\mu x)+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x})$

3. Η g γράφεται: $g(x) = e^{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})} \Rightarrow g'(x) =$

$= e^{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})}(\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x}))' =$

$= (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+\sqrt{x})+\sqrt{x}\,\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,(1+\sqrt{x})'\right) =$

$= (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2(1+\sqrt{x})}\right).$

4. Η φ γράφεται: $\varphi(x) = e^{x^3\ln(x^2+1)} \Rightarrow$

$\varphi'(x) = e^{x^3\ln(x^2+1)}(x^3\ln(x^2+1))' =$

$= (x^2+1)^{x^3}\left(3x^2\ln(x^2+1)+x^3\,\frac{1}{x^2+1}\,(x^2+1)'\right) =$

$= (x^2+1)^{x^3}\left(3x^2\ln(x^2+1)+\frac{2x^4}{x^2+1}\right)$

Θέμα 27. Αν είναι γνωστό ότι $1+x+x^2+\ldots+x^\nu = \frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}$, (1)
$x \neq 1$. Τότε να υπολογιστούν τα αθροίσματα:
$S_1 = 1+2x+3x^2+\ldots+\nu x^{\nu-1}$
$S_2 = 1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+\nu^2x^{\nu-1}$

Λύση: Η (1) αληθεύει $\forall\ x\in\mathbb{R}-\{1\}$ και αν παραγωγίσουμε τα μέλη της βρίσκουμε: $x'+(x^2)'+\ldots+(x^\nu)' = \left(\frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}\right)' \Rightarrow$

$S_1 = 1+2x+3x^2+\ldots+\nu x^{\nu-1} = \frac{(\nu+1)x^\nu(x-1)-(x^{\nu+1}-1)}{(x-1)^2}$ (2)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (2) επί x και παραγωγίζουμε οπότε έχουμε:

$x+2x^2+3x^3+\ldots+\nu x^\nu = \frac{\nu x^{\nu+2}-(\nu+1)x^{\nu+1}+x}{(x-1)^2}$ επομένως

$S_2 = 1+2^2x+3^2x^2+\ldots+\nu^2x^{\nu-1} = \frac{1+x-(\nu+1)^2x^\nu+(2\nu^2+2\nu-1)x^{\nu+1}-\nu x^{\nu+2}}{(1-x)^3}$

Θέμα 28. Έστω $1,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\nu-1}$ οι ρίζες της εξίσωσης $x^\nu-1 = 0$. Δείξετε ότι: $(1-\rho_1)(1-\rho_2)\ldots(1-\rho_{\nu-1}) = \nu$

Λύση: 1ος τρόπος. Γνωρίζουμε ότι αν μια εξίσωση έχει ρίζες τις $1,\rho_1,\ldots,\rho_{\nu-1}$ τότε αναλύεται σε γινόμενο

$x^\nu-1 = (x-1)(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})$ (1)

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (1) έχουμε:

$\nu x^{\nu-1} = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})+(x-1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})+$
$+(x-1)(x-\rho_1)\ldots(x-\rho_{\nu-1})+(x-1)(x-\rho_1)\ldots(x-\rho_{\nu-2})$ (2)

Η (2) για x = 1 δίνει: $\nu = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\ldots(1-\rho_\nu)$

2ος τρόπος. Επειδή οι αριθμοί $1,\rho_1,\rho_2,\ldots\rho_{\nu-1}$ είναι ρίζες έχουμε $x^\nu-1 = (x-1)(x-\rho_1)\ldots(x-\rho_{\nu-1})$ ή

$(x-1)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1) = (x-1)(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})$

$\rightarrow x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1 = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})$ (1)

'Αρα η (1) θα ισχύει και για $x = 1$ οπότε έχουμε:

$$\nu = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\ldots(1-\rho_{\nu-1})$$

Θέμα 29. Έστω οι συναρτήσεις f και g με παράγωγο στο $\rho \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ και $g(\rho) \neq 0$, $g'(\rho) \neq 0$.
Αν $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ και $F'(\rho) = 0$ δείξετε ότι $F(\rho) = \dfrac{f'(\rho)}{g'(\rho)}$

Λύση: Παραγωγίζουμε την σχέση $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(x) = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ και με $x = \rho$ παίρνουμε:

$F'(\rho) = \dfrac{f'(\rho)g(\rho)-f(\rho)g'(\rho)}{g^2(\rho)} = 0 \Rightarrow f'(\rho)g(\rho) = f(\rho)g'(\rho)$

$\Rightarrow \dfrac{f'(\rho)}{g'(\rho)} = \dfrac{f(\rho)}{g(\rho)}$ (1)

Η δοσμένη σχέση με $x = \rho$ δίνει $F(\rho) = \dfrac{f(\rho)}{g(\rho)}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $F(\rho) = \dfrac{f'(\rho)}{g'(\rho)}$

Θέμα 30. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.
Να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ αν $f(0) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(2) = 2$ $f'''(3) = 3$.

Λύση: Είναι $f(0) = \delta = 0$, $f'(x) = 3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ (1),
$f''(x) = 6\alpha x+2\beta$ (2), $f'''(x) = 6\alpha$ (3).
Οι (1), (2), (3) με βάση τις δοσμένες σχέσεις δίνουν το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 6\alpha &= 3 \\ 12\alpha+2\beta &= 2 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2} \\ \beta &= -2 \\ \gamma &= \tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

Και το ζητούμενο πολυώνυμο είναι: $f(x) = \frac{1}{2}x^3-2x^2+\frac{7}{2}x$

Θέμα 31. Αν η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη $\forall\, x \in \mathbb{R}^*_+$ ισχύει δε $f(x^2) = x^7$ δείξετε ότι $f'(4) = 112$.

Λύση: Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της $f(x^2) = x^7$ και επειδή το πρώτο μέλος είναι σύνθετη συνάρτηση έχουμε:
$f'(x^2)(x^2)' = 7x^6 \Rightarrow f'(x^2)2x = 7x^6 \Rightarrow 2f'(x^2) = 7x^5$ (1)
Αν στην (1) θέσουμε $x = 2$ παίρνουμε $2f'(4) = 7\cdot 2^5 \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(4) = 7\cdot 2^4 = 112.$

Θέμα 32. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ (1) $\forall$ x, y $\in \mathbb{R}$ με $f(x)f(y) \neq 1$.
Εάν $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Δείξετε ότι $f'(x) = 1+f^2(x)$.

Λύση: Είναι $f'(\xi) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(\xi)+f(h)}{1-f(\xi)f(h)} - f(\xi)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi)+f(h)-f(\xi)+f^2(\xi)f(h)}{(1-f(\xi)f(h))h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)(1+f^2(\xi))}{(1-f(\xi)f(h))h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \lim \frac{1+f^2(\xi)}{1-f(\xi)f(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1+f^2(\xi)}{1-f(\xi)f(h)}$$

(γιατί $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 1$). $= \dfrac{1+f^2(\xi)}{1-f(\xi)f(0)}$

Είναι όμως $f(0) = \dfrac{f(0)+f(0)}{1-f^2(0)} \Rightarrow f(0)-f^3(0) = 2f(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^3(0)+f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(1+f^2(0)) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$

Οπότε έχουμε $f'(\xi) = 1+f^2(\xi)$ $\forall$ $\xi\in\mathbb{R}$. Άρα $f'(x) = 1+f^2(x)$

Θέμα 33. Θεωρούμε την συνάρτηση f ορισμένη $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ και για την οποία εάν x_1, x_2 δύο τυχόντες πραγματικοί αριθμοί να ισχύει: $f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$
Εάν υπάρχει η παράγωγος στη θέση $x = 0$ και ισχύει $f(0)=1$ δείξετε ότι υπάρχει η παράγωγος της f $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ και ακόμη ότι ισχύει: $f'(x) = f(x)f'(0)$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$.

Λύση: Εάν $\xi \in \mathcal{D}(f)$ και ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$, τότε: $f'(\xi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon}$, με $(\xi+\varepsilon)\in\mathbb{R}$.

Αλλά από την υπόθεση $f(\xi+\varepsilon) = f(\xi)f(\varepsilon)$ και επομένως:

$f'(\xi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(\xi)f(\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon} = f(\xi)\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(\varepsilon)-1}{\varepsilon}$

Είναι όμως $f(0) = 1$ και επομένως: $f'(\xi) = f(\xi)\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon}$

Και επειδή $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon} = f'(0)$, θα έχουμε:

$f'(\xi) = f(\xi)f'(0)$ και αυτό $\forall\ \xi \in \mathbb{R}$. Ώστε ισχύει: $f'(x) =$ $= f(x)f'(0)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ που εκφράζει προφανώς, ότι υπάρχει και η παράγωγος της f $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 34. Έστω οι συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο $\xi \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = A$ και·

i) $f(\xi) = g(\xi)$ (1)

ii) $f(x)+x \le g(x)+\xi\ \forall\ x \in A$, με x ξ

Δείξετε ότι: $f'(\xi)+1 \le g'(\xi)$

Λύση: Η (ii) λόγω της (i) γίνεται:

$$f(x)-f(\xi)+x \le g(x)-g(\xi)+\xi \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}+1 \le \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi},$$

$x \ne \xi$ και αν πάρουμε όρια των μελών με $x \to \xi$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}+1 \le \lim_{x\to\xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \Leftrightarrow f'(\xi)+1 \le g'(\xi)$$

Θέμα 35. Για την συνάρτηση f ισχύει: $f(x+y) = f(x)f(y)$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ και ακόμη ότι $f(x) = 1+x\sigma(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, όπου για την σ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\sigma(x) = 1$. Αποδείξετε ότι υπάρχει η f΄ $\forall\ x \in \mathbb{R}$ και ότι είναι: $f(x) = e^x$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση f είναι παντού ορισμένη από την υπόθεση. Για $x = y = 0$ παίρνουμε: $f(0) = f^2(0)$ και επομένως $f(0) = 1$ ή $f(0) = 0$ και από την $f(x) = 1+x\sigma(x)$ για $x = 0$ έχουμε: $f(0) = 1$, άρα $f(0) \ne 0$.

Η παράγωγος της f στην θέση $x = x_0 \in \mathbb{R}$ θα είναι:

$$f'(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0)f(\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon} =$$

$$= f(x_0)\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon)-1}{\varepsilon}, \quad (\varepsilon \ne 0).$$

Αλλά από την $f(x) = 1+x\sigma(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f(\varepsilon) = 1+\varepsilon\sigma(\varepsilon)$

$$\Rightarrow \sigma(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon)-1}{\varepsilon} \text{ και επομένως: } \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon)-1}{\varepsilon} = 1$$

Μετά από αυτό: $f'(x_0) = f(x_0)$ και αυτό $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή: υπάρχει η παράγωγος της f $\forall\ x \in \mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x) = f(x)$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι οι μόνες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $f'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις του τύπου $f(x)=ce^x$

όπου c σταθερά στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, τότε $F'(x) = \frac{f'(x)e^x-(e^x)'f(x)}{(e^x)^2} =$

$= \frac{f'(x)-f(x)}{e^x} = 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$, το οποίο σημαίνει ότι η F είναι μια σταθερή $\forall \; x \in \mathbb{R}$.

Επομένως: $f(x) = ce^x$.

Στην περίπτωση μας για $x = 0$ θα έχουμε: $f(0) = ce^0 = c = 1$

'Αρα $f(x) = e^x \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 36. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

α) $f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y) \; \forall \; x, y \in \mathbb{R}$.

β) $f'(0) = 2$

Δείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$, ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, iii) $f'(x) = f(x) + 2e^x \forall x \in \mathbb{R}$

Λύση: i) Επειδή η (α) ισχύει $\forall$ x, $y \in \mathbb{R}$ θα ισχύει και για $x = y = 0$ οπότε παίρνουμε $f(0) = 0$.

ii) Επειδή $f(0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 2$

iii) Επειδή ο τύπος της f μετασχηματίζει το άθροισμα σε κάποια άλλη έκφραση θεωρούμε τον τύπο

$$f'(\xi) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\xi+t)-f(\xi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\xi}f(t)+e^{t}f(\xi)-f(\xi)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{\xi}f(t)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{f(\xi)(e^t-1)}{t} = e^{\xi}\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} + f(\xi)\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} =$$

$= 2e^{\xi}+f(\xi)$ γιατί $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 2$ και $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

και επειδή ξ τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 2e^x + f(x)$ $\forall \; x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 37. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = \xi \in \mathbb{R}$.

Δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{xf(\xi)-\xi f(x)}{x-\xi} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$

Λύση: 1ος τρόπος. Είναι $f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \xi f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\xi f(x)-\xi f(\xi)}{x-\xi} \Rightarrow f(\xi)-\xi f'(\xi) =$$

$$= f(\xi) - \lim_{x\to\xi} \frac{\xi f(x)-\xi f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} f(\xi) - \lim_{x\to\xi} \frac{\xi f(x)-\xi f(\xi)}{x-\xi} =$$

$$= \lim_{x\to\xi} \frac{(x-\xi)f(\xi)-\xi f(x)+\xi f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{xf(\xi)-\xi f(x)}{x-\xi}$$

2ος τρόπος. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ είναι και συνεχής δηλαδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Επομένως το $\lim_{x\to\xi} \frac{xf(\xi)-\xi f(x)}{x-\xi} = \frac{0}{0}$. Άρα ισχύει:ι $\lim_{x\to\xi} \frac{xf(\xi)-\xi f(x)}{x-\xi} =$

$$= \lim_{x\to\xi} \frac{(xf(\xi)-\xi f(x))'}{(x-\xi)'} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(\xi)-\xi f'(x)}{1} = f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

3ος τρόπος. Επειδή $\lim_{x\to\xi} \frac{xf(\xi)-\xi f(x)}{x-\xi} = \frac{0}{0}$ κάνουμε γινόμενο παραγόντων του αριθμητή, προσθέτοντας και αφαιρώντας τον αριθμό $\xi f(\xi)$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{xf(\xi)-\xi f(x)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{xf(\xi)-\xi f(x)+\xi f(\xi)-\xi f(\xi)}{x-\xi} =$$

$$= \lim_{x\to\xi} \frac{(x-\xi)f(\xi)-\xi(f(x)-f(\xi))}{x-\xi} = f(\xi)-\xi\lim_{\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} =$$

$$= f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

Θέμα 38. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

i) $f(1) = 1$, ii) $f(3) = 25$, iii) $f(x+y) = f(x)+axy+4y^2$ $\forall\ x, y\in\mathbb{R}$.

1. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού α.

2. Υπάρχει η παράγωγος της f και είναι $f'(x) = 4x$.

3. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση: 1) Επειδή η (iii) ισχύει $\forall\ x, y\in\mathbb{R}$ θα ισχύει και για $x = 1$ και $y = 2$ οπότε $f(3)-f(1) = 2a+16 \Rightarrow a = 4$.

2) Η (iii) γράφεται $f(x+y)-f(x) = y(ax+4y)$ και με $y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x+y)-f(x)}{y} = 4x+4y \quad (A)$$

Αν στα μέλη της (Α) πάρουμε όρια του $y\to 0$ έχουμε:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \lim_{y\to 0}(4x+4y) \Rightarrow f'(x) = 4x$$

3) Επειδή δε $f'(x) = 4x \Rightarrow f(x) = 2x^2+c$, $c\in\mathbb{R}$ και για $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2+c \Rightarrow c = -1$.

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = 2x^2-1$.

Θέμα 39. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $\forall\ x, y\in\mathbb{R}$ $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^2$ δείξετε ότι f είναι σταθερή.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει η παράγωγος της f και είναι μηδέν $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Η δοσμένη σχέση γράφεται: $0 \le \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \le |x-y|$ $(x \ne y)$

οπότε αν πάρουμε όρια όταν $x \to y \Rightarrow x-y \to 0$ και επομένως είναι και $\lim\limits_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(y) = 0\ \forall\ y \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Θέμα 40. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$ (1)
Δείξετε ότι: $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση: Παραγωγίζουμε τα μέλη της (1) δύο φορές ως προς x θεωρώντας το y σταθερό και έχουμε:

$f'(x+y)(x+y)'+f'(x-y)(x-y)' = 2f(x)f'(y) \Rightarrow$

$f''(x+y)+f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$ (2)

Όμοια παραγωγίζουμε τα μέλη της (1) δύο φορές ως προς y θεωρώντας το x σταθερό και έχουμε:

$f'(x+y)(x+y)'+f'(x-y)(x-y)' = 2f(x)f'(y) \Rightarrow$

$f''(x+y)-f''(x-y)(x-y)' = 2f(x)f''(y) \Rightarrow$

$f''(x+y)+f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$ (3).

Από τις (2) και (3) έχουμε: $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$
$\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Θέμα 41. Δίνεται η συνάρτηση f με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$ για την οποία ισχύει $f(xy) = f(x)+f(y)\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}_+^*$ και $f'(1) = 1$ (1)
Δείξετε ότι i) $xf'(x) = yf'(y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}_+^*$
ii) $xf'(x) = 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$

Λύση: i) Παραγωγίζουμε τα μέλη της (1) ως προς x θεωρώντας το y σταθερό και έχουμε:

$f'(xy)(xy)' = f'(x) \Rightarrow yf'(xy) = f'(x)$ (2)

Όμοια παραγωγίζουμε τα μέλη της (1) ως προς y θεωρώντας το x σταθερό και έχουμε:

$f'(xy)(xy)' = f'(y) \Rightarrow xf'(xy) = f'(y)$ (3)

Από τις (2) και (3) έχουμε: $\frac{f'(x)}{y} = \frac{f'(y)}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xf'(x) = yf'(y)\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}_+^*$

ii) Η (1) με $y = 1$ και $x \in \mathbb{R}_+^*$ δίνει $xf'(x) = 1$.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις με τύπους

i) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ x^2+8, & x \leq 0 \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

iii) $f(x) = 4|x|+3x^2+1$

Είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 0$.

2. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες οι συναρτήσεις με τύπους: i) $f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \leq 3 \\ x^2+1, & x > 3 \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x \geq 0 \\ x^2-2x, & x < 0 \end{cases}$

iii) $h(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ iv) $φ(x) = \begin{cases} xημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

3. Νά βρεθεί η συνάρτηση πρώτης παραγώγου των συναρτήσεων με τύπους:

i) $f(x) = \begin{cases} x^4, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^5, & x > 1 \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} e^x, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{\ln x}, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

iii) $h(x) = \begin{cases} 3-\sqrt{x-3}, & x \in [2,11] \\ -3+\sqrt{x-2}, & x \in [11,+\infty) \end{cases}$

iv) $φ(x) = \begin{cases} x^2 συν\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

4. Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & x \in [-2,0] \\ 0, & x < -2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x+2-\sqrt{x+2}, & -2 \leq x \leq 0 \\ x+2, & x < -2 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f,g,f+g,fog είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = -2$.

5. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και συνεχής. Σε συνέχεια δείξετε ότι η παράγωγος συνάρτηση είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 0$.

6. Να βρείτε την συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f με $f(x) = \max\{x^2+2x,\ 3x^2+5\}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^4 \text{συν}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος στην θέση $x_0 = 0$.

8. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = |x^5|$ να εξετάσετε αν υπάρχει η $f^{(5)}(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

εξετάσετε αν υπάρχουν τα $f'(0), f''(0)$.

10. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < 3 \\ (x-3)(x-4), & 3 \leq x \leq 4 \\ x-4, & x > 4 \end{cases}$

Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

11. Να βρεθεί η συνάρτηση της δεύτερης παραγώγου της f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^3+1}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

12. Να μελετηθεί ως προς την παραγωγισιμότητα η συνάρτηση f με $f(x) = \min\{\text{συν}x, \text{συν}^3 x\}$ με $0 \leq x \leq \pi$

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \kappa x+\lambda, & x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$

Να προσδιορίσετε τα κ,λ ώστε η f να έχει παράγωγο στη θέση $x_0 = 2$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2x, x < 0 \\ \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\ 0 \le x \le 2 \\ x^2,\ x > 1 \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε τα πραγματικά α,β,γ,δ έτσι ώστε η f να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

15. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|},\ |x| > \xi \\ \kappa x^2+\lambda,\ |x| \le \xi \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα πραγματικά κ,λ ώστε να υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση $x = \xi$.

16. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+2-2\alpha|\alpha|,\ x < 2 \\ \alpha^2x^2+2\alpha x+1\ \ ,\ x \ge 2 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

17. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα η συνάρτηση f με $f(x) = \lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{x^3+x^{2\nu+1}}{1+x^2}$

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \alpha e^x x\ ,\ x \le 0 \\ \beta(x^2+4x-1)+\gamma,\ x > 0 \end{cases}$

Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α,β,γ ώστε να παραγωγίζεται η f στη θέση $x = 0$.

19. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \kappa\eta\mu\,\dfrac{\pi(x+2\beta)}{2},\ |x| < 1 \\ \dfrac{2-x^2}{1+x^2}\ \ ,\ |x| \ge 1 \end{cases}$

Να προσδιορίσετε τα $\kappa,\beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{|\eta\mu x|e^{\nu x}+|\sigma\upsilon\nu x|}{1+e^{\nu x}}$

Να μελετηθεί ως προς την παράγωγο και τη συνέχεια.

21. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2-\frac{1}{2}},\ x < 1 \\ \alpha x^3+\beta x+\gamma,\ x \ge 1 \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να έχει παράγωγο δεύτερης τάξης $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

22. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) =$
$$= \lim_{\nu\to\infty} \frac{(x^2+4x+2)2^{\nu x}+(x^2+\alpha x+\beta)3^{\nu x}}{2^{\nu x}+3^{\nu x}}$$
Να προσδιοριστούν τα πραγματικά α,β έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

23. Αν $f(x) = \begin{cases} e^{x^2-x}, & x < 1 \\ \alpha x^2+\beta x+\gamma, & x \geq 1 \end{cases}$

Τότε να προσδιορίσετε τα α,β,γ ώστε να υπάρχουν οι $f'(x), f''(x)$.

24. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x\ln x$

ii) $f(x) = x^2-4x+5+e^x$

iii) $f(x) = \frac{x+\varepsilon\varphi x}{x^2}$

iv) $f(x) = x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2(x^3)$

v) $f(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}$

vi) $f(x) = \eta\mu^3(2x+1)$

vii) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

viii) $f(x) = \eta\mu(\nu x)\sigma\upsilon\nu^\nu(x)$

ix) $f(x) = \frac{\varepsilon\varphi(x+\alpha)}{\sigma\varphi(x+\alpha)}$

x) $f(x) = \frac{x^4(x+1)^3}{x^2+1}$

25. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = \sqrt{4x^2-5x-6}$
2. $h(x) = \sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$
3. $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3x+4}}$
4. $f_1(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$
5. $h_1(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^2+1}}$
6. $g_1(x) = \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$

26. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = \eta\mu^4(4x+1)$
2. $h(x) = 2\sigma\upsilon\nu x-x^3\eta\mu x$
3. $g(x) = \eta\mu^\nu(\sigma\upsilon\nu x)$
4. $\varphi(x) = \eta\mu(\nu x)\sigma\upsilon\nu(\nu x)$
5. $f_1(x) = x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^\nu(x^\nu)$
6. $h_1(x) = x\ln(\sigma\upsilon\nu x)$
7. $g_1(x) = e^{2x}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$
8. $\varphi_1(x) = x^\nu\ln(x^\nu)$

27. Όμοια να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = (x+\sqrt{1+x^2})^3(x-\sqrt{1+x^2})^4$

2. $g(x) = \frac{ημ^{ν}x - συν^{ν}x}{συν^{3}x}$ 3. $φ(x) = \frac{ημ^{2}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+συν^{2}\frac{x}{2}}}$

4. $f_1(x) = \sqrt{1+ημ^{2}(2x)}+\sqrt{1-ημ^{2}(2x)}$

5. $g_1(x) = \ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right)+εφ(e^{-x})$

6. $φ_1(x) = \ln[\ln(ημx+e^{-x})]$

28. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. $f(x) = (e^{x})^{x}$
2. $h(x) = e^{x^{2}+2}+\ln(ημx)$
3. $g(x) = \sqrt{\ln(ημx)}+e^{ημx+συνx}$
4. $φ(x) = x^{x^{x}}$
5. $f_1(x) = (\ln x)^{e^{x}}$
6. $h_1(x) = (x^{2}+x+1)^{x^{2}+2}$
7. $g_1(x) = (ημx)^{εφx}$
8. $φ_1(x) = (συνx)^{e^{x}+x^{2}+2}$

29. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. $f(x) = (\ln x)^{ημx}$
2. $h(x) = (3x^{2}+5x)^{x^{2}+1}$
3. $g(x) = x^{x^{3}+2x}+5^{\sqrt{x}}$
4. $f_1(x) = (1+\sqrt{x}+x)^{\sqrt{x}+2}$
5. $h_1(x) = \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x}$
6. $g_1(x) = (συνx)^{\ln x}$

30. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων.

1. $f(x) = \ln(e^{x}+\sqrt{1+e^{2x}})$
2. $h(x) = συν^{4}(\sqrt{x}+e^{x^{2}+1})$
3. $φ(x) = ημ^{ν}(αx)συν^{μ}(βx)$
4. $g(x) = ημ(ημx^{x})$
5. $f_1(x) = e^{e^{x}}e^{x}$
6. $h_1(x) = (αx^{2}+βx+γ)^{ν}e^{x}$
7. $φ_1(x) = x^{x^{2}+1}+2^{\sqrt{x}+e^{x}}$
8. $g_1(x) = 4\,\frac{συν(4x)}{ημ(4x)}$

31. Να υπολογίσετε τις παραγώγους 4ης τάξης των συναρτήσεων

1. $f(x) = e^{x}\ln x$
2. $f(x) = x\ln x$
3. $f(x) = x^{3}e^{x}$
4. $f(x) = x^{2}e^{x}$

32. Αν $f(x) = αx^{5}+βx^{4}+γx^{3}+δx^{2}+εx+ζ$ με $α \neq 0$.

Δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^{5}}{5!}f^{(5)}(0)+\frac{x^{4}}{4!}f^{(4)}(0)+\frac{x^{3}}{3!}f^{(3)}(0)+$

$+\frac{x^{2}}{2!}f^{(2)}(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+f(0)$

33. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^{x^2}$
2. $f(x) = εφ^{ν}(ημ^{ν}x)$
3. $f(x) = ημ^{4}(ημx^{x})$
4. $f(x) = \ln^{ν}(ημx^{x})$

34. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g με

$f(x) = x^3-x^2-x+3$ και $g(x) = \frac{x-2}{x^2+1}+5$.

Αν $\forall\ x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)+κx \leq g(x)+2κ$. Δείξετε ότι $f'(2)+κ \leq g'(2)$.

35. Αν $\forall\ x,\ y\in\mathbb{R}$ είναι $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^3$.
Δείξετε ότι $f'(x) = 0$.

36. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $\forall\ x\in\mathbb{R}$ $|f(x)| \leq x^2$ δείξετε ότι $f'(x) = 0$.

37. Δείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε

$$\lim_{t\to0}\frac{f^2(ξ+4t)-f^2(ξ-2t)}{t} = 12f(ξ)f'(ξ)$$

38. Αν $\forall\ x\in(-1,1)$ ισχύει $x-x^2 \leq f(x) \leq x+x^2$ τότε υπάρχει $f'(0)$ και ισχύει $f'(0) = 1$.

39. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σ'αυτό.
Δείξετε ότι: $\lim\limits_{t\to0}\frac{f^2(x+κt)-f^2(x-λt)}{t} = 2(κ+λ)f(x)f'(x)$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

40. Εάν $ημ\frac{x}{2} \leq f(x) \geq \frac{e^x-1}{2}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$. Δείξετε ότι υπάρχει η $f'(0)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Σε θέματα που μας ζητούν να βρούμε την νιοστή παράγωγο μιας συνάρτησης f ή που ζητείται να δείξουμε ότι η νιοστή παράγωγος της f είναι κάποια παράσταση.
Εργαζόμαστε με τους παρακάτω δύο τρόπους:

i) Βρίσκουμε μερικές από τις αρχικές παραγώγους 1η -2η-3η κ.λ.π., από την μορφή που έχουν υποψιαζόμαστε ποιά θα είναι η μορφή της νιοστής παραγώγου και αυτό το αποδείχνουμε με επαγωγή.

ii) Αν μας δίνεται ποιός είναι ο τύπος της νιοστής παραγώγου της f τότε επιβεβαιώνουμε την αλήθεια αυτού με επαγωγή.

iii) Αν η για απόδειξη σχέση περιέχει την 1η-2η-3η-κ.λ.π παράγωγο της f τότε τις υπολογίζουμε από τον τύπο της f και τις αντικαθιστούμε στα μέλη εκείνης που θέλουμε να αποδείξουμε.

Τα θέματα που ακολουθούν θα κάνουν ποιό κατανοητή τη μέθοδο.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος των συναρτήσεων με τύπους:

i) $f(x) = e^{\kappa x}$, $\kappa \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = \ln x$

iii) $f(x) = \sigma \upsilon \nu(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

iv) $f(x) = \eta \mu(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Λύση: i) Βρίσκουμε τις αρχικές παραγώγους της f και είναι:
$f'(x) = \kappa e^{\kappa x}$, $f''(x) = \kappa^2 e^{\kappa x}$, $f'''(x) = \kappa^3 e^{\kappa x}$.

Από τις παραπάνω σχέσεις υποψιαζόμαστε ότι η νιοστή παράγωγος της f θα έχει την μορφή $f^{(\nu)}(x) = \kappa^\nu e^{\kappa x}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ (1)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει $\forall$ $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Με $\nu = 1$ ισχύει γιατί είναι $f'(x) = \kappa e^{\kappa x}$.

Δεχόμαστε ότι με $\nu = \rho$ ισχύει $f^{(\rho)}(x) = \kappa^\rho e^{\kappa x}$ (2)

Και θα αποδείξουμε ότι με $\nu = \rho+1$ ισχύει
$f^{(\rho+1)}(x) = \kappa^{\rho+1} e^{\kappa x}$ (3).

Θεωρούμε την σχέση (2) και παραγωγίζουμε τα μέλη οπότε είναι:

$f^{(\rho+1)}(x) = \kappa^\rho e^{\kappa x}(\kappa x)' = \kappa^{\rho+1} e^{\kappa x}$ δηλαδή η (3).

Επομένως η (1) ισχύει $\forall$ $\nu \in \mathbb{N}^*$ και η νιοστή παράγωγος της είναι $f^{(\nu)}(x) = \kappa^\nu e^{\kappa x}$.

ii) Βρίσκουμε μερικές αρχικές παραγώγους της f και είναι:

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{1.2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{1.2.3}{x^4} =$

$= (-1)^3 \frac{3!}{x^4}$ κ.λ.π.

Από αυτές υποψιαζόμαστε ότι η νιοστή παράγωγος της f έχει τύπο $f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{x^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ (1)

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι η (1) ισχύει $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$. Για ν = = 1 ισχύει γιατί είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$. Έστω ότι για ν = κ ισχύει $f^{(\kappa)}(x) = (-1)^{\kappa-1} \frac{(\kappa-1)!}{x^\kappa}$ (2) και θα αποδείξουμε ότι για ν = κ+1 ισχύει: $f^{(\kappa+1)}(x) = (-1)^\kappa \frac{\kappa!}{x^{\kappa+1}}$ (3)

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (2) έχουμε

$f^{(\kappa+1)}(x) = (-1)^{\kappa-1}(\kappa-1)!\ (\frac{1}{x^\kappa})' =$

$= (-1)^{\kappa-1}(\kappa-1)!(-\kappa)\frac{1}{x^{\kappa+1}} = (-1)^{\kappa-1}(-1)(\kappa-1)!\kappa\frac{1}{x^{\kappa+1}} =$

$= (-1)^\kappa \frac{\kappa!}{x^{\kappa+1}}$ δηλαδή η (3)

Άρα η (1) ισχύει $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$ και επομένως η νιοστή παράγωγος της f είναι $f^\nu(x) = (-1)^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{x^\nu}$.

iii) Οι αρχικές παράγωγοι της f είναι αντίστοιχα

$f'(x) = -(\alpha x)'\eta\mu(\alpha x) = -\alpha\eta\mu(\alpha x) = \alpha\sigma\upsilon\nu^2(\frac{\pi}{2}+\alpha x)$

$f''(x) = -\alpha(\frac{\pi}{2}+\alpha x)'\eta\mu(\frac{\pi}{2}+\alpha x) = -\alpha^2\eta\mu(\frac{\pi}{2}+\alpha x) =$

$= \alpha^2\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{2}+\alpha x)$ κ.λ.π.

Από την f' και f'' υποψιαζόμαστε ότι η νιοστή παράγωγος της f θα είναι: $f^{(\nu)}(x) = \alpha^\nu\sigma\upsilon\nu(\frac{\nu\pi}{2}+\alpha x)\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

Πράγματι για ν = 1 ισχύει γιατί είναι $f'(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\alpha x) =$ $= -\alpha\eta\mu\alpha x = \alpha\ \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\alpha x)$

Έστω ότι για ν = κ ισχύει: $f^{(\kappa)}(x) = \alpha^\kappa\sigma\upsilon\nu(\frac{\kappa\pi}{2}+\alpha x)$ (1)

Και θα αποδείξουμε ότι και για ν = κ+1 ισχύει:

$f^{(\kappa+1)}(x) = \alpha^{\kappa+1}\sigma\upsilon\nu(\frac{(\kappa+1)\pi}{2}+\alpha x)$ (2)

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (1) έχουμε:

$f^{(\kappa+1)}(x) = -\alpha^{\kappa}(\frac{\kappa\pi}{2}+\alpha x)'\eta\mu(\frac{\kappa\pi}{2}+\alpha x) = -\alpha^{\kappa+1}\eta\mu(\frac{\kappa\pi}{2}+\alpha x) =$

$= \alpha^{\kappa+1}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\frac{\kappa\pi}{2}+\alpha x) = \alpha^{\kappa+1}\sigma\upsilon\nu(\frac{(\kappa+1)\pi}{2}+\alpha x)$ δηλαδή η (2)

'Αρα η f έχει νιοστή παράγωγο την $f^{(\nu)}(x) =$

$= \alpha^{\nu}\sigma\upsilon\nu(\frac{\nu\pi}{2}+\alpha x)$.

iv) Βρίσκουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της f.

Είναι $f'(x) = (\alpha x)'\sigma\upsilon\nu(\alpha x) = \alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha x) = \alpha\eta\mu(\frac{\pi}{2}+\alpha x)$

και $f''(x) = \alpha(\frac{\pi}{2}+\alpha x)'\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\alpha x) = \alpha^2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\alpha x) =$

$= \alpha^2\eta\mu(2\frac{\pi}{2}+\alpha x)$. Από αυτές υποψιαζόμαστε ότι η νιοστή παράγωγός της είναι $f^{(\nu)}(x) = \alpha^{\nu}\eta\mu(\frac{\nu\pi}{2}+\alpha x)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ (1)

Πράγματι για ν = 1 ισχύει γιατί είναι $f'(x) = \alpha\eta\mu(\frac{\pi}{2}+\alpha x) =$

$= \alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha x)$ που ισχύει.

'Εστω ότι για ν = κ ισχύει $f^{(\kappa)}(x) = \alpha^{\kappa}\eta\mu(\frac{\kappa\pi}{2}+\alpha x)$ (2)

Θα δείξουμε ότι για ν = κ+1 ισχύει $f^{(\kappa+1)}(x) =$

$= \alpha^{\kappa+1}\eta\mu(\frac{(\kappa+1)\pi}{2}+\alpha x)$ (3)

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (2) έχουμε:

$f^{(\kappa+1)}(x) = \alpha^{\kappa}(\frac{\kappa\pi}{2}+\alpha x)'\sigma\upsilon\nu(\frac{\kappa\pi}{2}+\alpha x) =$

$= \alpha^{\kappa+1}\sigma\upsilon\nu(\frac{\kappa\pi}{2}+\alpha x) = \alpha^{\kappa+1}\eta\mu(\frac{(\kappa+1)\pi}{2}+\alpha x)$ δηλαδή η (3).

'Αρα η (1) ισχύει $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$ και επομένως η νιοστή παράγωγος της $f(x) = \eta\mu(\alpha x)$ είναι η $f^{(\nu)}(x) = \alpha^{\nu}\eta\mu(\frac{\nu\pi}{2}+\alpha x)$.

Θέμα 2. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος των συναρτήσεων

i) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+4)}$ **iii)** $f(x) = \sqrt{x}$

ii) $f(x) = \ln(4x+1)$ **iv)** $f(x) = \frac{1}{\kappa-\lambda x}$

Λύση: i) Αναλύουμε την f σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.

Είναι $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x-1)}{(x-1)(x+4)} = \frac{(A+B)x+4A-B}{(x-1)(x+4)} =$

$= \frac{0x+1}{(x-1)(x+4)}$

Άρα πρέπει $\{A+B = 0 \wedge 4A-B = 1\} \Leftrightarrow \{B = -\frac{1}{5},\ A = \frac{1}{5}\}$

και η f γράφεται: $f(x) = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}\right]$.

Έχει δε πρώτη παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+4)^2}\right] =$

$= (-1)^1 \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+4)^2}\right)$ και δεύτερη

$f''(x) = (-1)^1 \frac{1}{5}\left[-\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+4)^3}\right] =$

$= (-1)^2\, 1.2.\, \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+4)^3}\right)$

Από αυτές υποψιαζόμαστε ότι η νιοστή παράγωγος της είναι

$f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{5}(-1)^\nu \nu!\left[\frac{1}{(x-1)^{\nu+1}} - \frac{1}{(x+4)^{\nu+1}}\right], \nu \in \mathbb{N}^*$ (1)

Πράγματι για $\nu = 1$ ισχύει.

Έστω ότι για $\nu = \kappa$ ισχύει

$f^{(\kappa)}(x) = \frac{1}{5}(-1)^\kappa \kappa!\left[\frac{1}{(x-1)^{\kappa+1}} - \frac{1}{(x+4)^{\kappa+1}}\right]$ (2)

Και θα δείξουμε ότι για $\nu = \kappa+1$ ισχύει:

$f^{(\kappa+1)}(x) = \frac{1}{5}(-1)^{(\kappa+1)}(\kappa+1)!\left[\frac{1}{(x-1)^{\kappa+2}} - \frac{1}{(x+4)^{\kappa+2}}\right]$ (3)

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (2) έχουμε:

$f^{(\kappa+1)}(x) = \frac{1}{5}(-1)^\kappa \kappa!\left[-(\kappa+1)\frac{1}{(x-1)^{\kappa+2}} + \frac{(\kappa+1)}{(x+4)^{\kappa+2}}\right] =$

$= \frac{1}{5}(-1)(-1)^\kappa \kappa!(\kappa+1)\left[\frac{1}{(x-1)^{\kappa+2}} - \frac{1}{(x+4)^{\kappa+2}}\right] =$

$= \frac{1}{5}(-1)^{\kappa+1}(\kappa+1)!\left[\frac{1}{(x-1)^{\kappa+2}} - \frac{1}{(x+4)^{\kappa+2}}\right]$. Δηλαδή την (3).

Άρα η (1) ισχύει $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$ και επομένως η νιοστή παράγωγος της f είναι η (1).

ii) Βρίσκουμε μερικές αρχικές παραγώγους της f και έχουμε

$f'(x) = \frac{4}{4x+1}$, $f''(x) = (-1)\frac{4^2}{(4x+1)^2}$,

$f'''(x) = 4^2(-1)(-2)4\frac{1}{(4x+1)^3} = 4^3(-1)(-2)\frac{1}{(4x+1)^3}$

Από αυτές υποψιαζόμαστε ότι η νιοστή παράγωγος της f είναι

$f^{(\nu)}(x) = 4^\nu(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\frac{1}{(4x+1)^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ (1)

Πράγματι αν δεχτούμε ότι για $\nu = \kappa$ ισχύει

$f^{(\kappa)}(x) = 4^\kappa(\kappa-1)!(-1)^{\kappa-1}\frac{1}{(4x+1)^\kappa}$ (2)

τότε με παραγώγιση των μελών της (2) έχουμε:

$f^{(\kappa+1)}(x) = 4^{\kappa}(\kappa-1)!(-1)^{\kappa-1}(-\kappa)\dfrac{4}{(4x+1)^{\kappa+1}} =$

$= 4^{\kappa+1}\kappa!(-1)^{\kappa}\dfrac{1}{(4x+1)^{\kappa+1}}$

Δηλαδή η (1) ισχύει και για ν = κ+1. Επομένως ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό. Άρα η νιοστή παράγωγος της f είναι η (1)

iii) Είναι $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(-1)x^{-\frac{3}{2}} = (-1)^{2-1}\dfrac{(2.2-2)!}{(2-1)!2^{2\cdot2-1}}\cdot x^{\frac{1}{2}-2}$

$f'''(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(-1)\left(-\dfrac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1} = (-1)^{3-1}\dfrac{(2.3-2)!}{(3-1)!2^{2\cdot3-1}}\cdot x^{\frac{1}{2}-3}$

Απ'όπου υποψιαζόμαστε ότι η νιοστή παράγωγος της f είναι:

$f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\dfrac{(2\nu-2)!}{(\nu-1)!2^{2\nu-1}}x^{\frac{1}{2}-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ (1)

Πράγματι αν δεχτούμε ότι η (1) είναι αληθινή τότε με παραγώγιση των μελών της έχουμε:

$f^{(\nu+1)}(x) = (-1)^{\nu-1}\dfrac{(2\nu-2)!}{(\nu-1)!2^{2\nu-1}}\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)x^{\frac{1}{2}-\nu-1} =$

$= (-1)^{\nu}\dfrac{(2\nu-2)!(2\nu-1)2\nu}{(\nu-1)!2^{2\nu}2\nu}x^{\frac{1}{2}-(\nu+1)} =$

$= (-1)^{\nu}\dfrac{(2\nu)!}{\nu!2^{2\nu+1}}x^{\frac{1}{2}-(\nu+1)}$

Επομένως η (1) ισχύει $\forall\ \nu\in\mathbb{N}^*$. Άρα ο τύπος της νιοστής παραγώγου της f είναι ο (1).

iv) Βρίσκουμε μερικές αρχικές παραγώγους της f.

Είναι $f'(x) = \dfrac{\lambda}{(\kappa-\lambda x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2\lambda^2}{(\kappa-\lambda x)^3}$, $f'''(x) = \dfrac{2.3\lambda^3}{(\kappa-\lambda x)^4} =$

$= \dfrac{3!\lambda^3}{(\kappa-\lambda x)^4}$.

Απ'όπου υποψιαζόμαστε ότι η νιοστή παράγωγος της f είναι:

$f^{(\nu)}(x) = \dfrac{\nu!\lambda^{\nu}}{(\kappa-\lambda x)^{\nu+1}}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$(1)

Πράγματι αν δεχτούμε ότι η (1) ισχύει τότε με παραγώγιση των μελών της έχουμε:

$f^{(\nu+1)}(x) = \dfrac{-\nu!\lambda^{\nu}(\nu+1)(\kappa-\lambda x)^{\nu}(\kappa-\lambda x)'}{(\kappa-\lambda x)^{2\nu+2}} = \dfrac{(\nu+1)!\lambda^{\nu+1}}{(\kappa-\lambda x)^{\nu+2}}$

Δηλαδή η (1) ισχύει και για ν = ν+1 επομένως $\forall\ \nu\in\mathbb{N}^*$.
Άρα ο τύπος της νιοστής παραγώγου της f είναι ο (1).

Θέμα 3. Αν οι συναρτήσεις φ και g είναι ν φορές παραγωγίσιμες και α,β∈ℝ. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με f(x) = = αφ(x)+βg(x) έχει νιοστή παράγωγο και είναι:
$f^{(\nu)}(x) = \alpha\varphi^{(\nu)}(x)+\beta g^{(\nu)}(x)$ (1).

Λύση: Για ν = 1 ισχύει $f'(x) = \alpha\varphi'(x)+\beta g'(x)$.

Έστω ότι για ν = κ-1 ισχύει $f^{(\kappa-1)}(x) = \alpha\varphi^{(\kappa-1)}(x)+$ $+\beta g^{(\kappa-1)}(x)$ (2).

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (2) έχουμε:
$f^{(\kappa)}(x) = \alpha\varphi^{(\kappa)}(x)+\beta g^{(\kappa)}(x)$.

Δηλαδή η (1) ισχύει και για ν = κ με την προϋπόθεση ότι ισχύει για ν = κ-1. Επομένως η (1) ισχύει για κάθε φυσικό. Άρα η νιοστή παράγωγος της f είναι η (1).

Θέμα 4. Δείξετε ότι η ν-οστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x$ είναι: $f^{(\nu)}(x)=4^{(\nu-1)}\sigma\upsilon\nu(\nu\frac{\pi}{2}+4x)$ (i)

Απόδειξη: Για ν = 1 ισχύει γιατί:

$f'(x) = 4\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x-4\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x = 2\eta\mu^2 x(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)-$
$-2\sigma\upsilon\nu^2 x(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x) = 2\eta\mu 2x(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x) =$
$= -2\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu 2x = -\eta\mu 4x = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+4x) =$
$= 4^{1-1}\sigma\upsilon\nu(1\frac{\pi}{2}+4x)$.

Έστω ότι για ν = κ ισχύει $f^{(\kappa)}(x) = 4^{\kappa-1}\sigma\upsilon\nu(\kappa\frac{\pi}{2}+4x)$ (1)

Θα δείξουμε ότι για ν = κ+1 ισχύει
$f^{(\kappa+1)}(x) = 4^{\kappa}\sigma\upsilon\nu((\kappa+1)\frac{\pi}{2}+4x)$ (2)

Αν παραγωγίσουμε την (1) παίρνουμε:
$f^{(\kappa+1)}(x) = -4^{\kappa-1}\eta\mu(\kappa\frac{\pi}{2}+4x)4 = 4^{\kappa}(-\eta\mu(\kappa\frac{\pi}{2}+4x)) =$
$= 4^{\kappa}\sigma\upsilon\nu((\kappa+1)\frac{\pi}{2}+4x)$. Δηλαδή την (2).

Άρα η (i) ισχύει ∀ $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Θέμα 5. (Πρόβλημα Leibniz)

Αν οι συναρτήσεις φ και g έχουν παραγώγους τάξεως (ν+1) τότε και η συνάρτηση f = φ·g έχει παράγωγο τάξεως (ν+1) και ισχύει:

$$f^{(\nu)} = \varphi^{(\nu)}\cdot g + \frac{\nu}{1!}\varphi^{(\nu-1)}\cdot g' + \frac{\nu(\nu+1)}{1.2}\varphi^{(\nu-2)}\cdot g'' + \ldots +$$

$$+\varphi g^{(\nu)} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}\varphi^{(\nu-\kappa)}\cdot g^{(\kappa)} \quad (1) \quad \binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$$

Λύση: Για $\nu = 1$ ισχύει γιατί είναι: $f' = \varphi' g + \varphi g$

'Εστω ότι για $\nu = \nu$ ισχύει η (1). Θα δείξουμε ότι και για $\nu = \nu+1$ ισχύει. Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (1) έχουμε:

$$(f^{(\nu)})' = (\varphi^{(\nu)}g)' + \frac{\nu}{1!}(\varphi^{(\nu-1)}g')' + \ldots + (\varphi g^{(\nu)})' =$$

$$= \varphi^{(\nu+1)}g + \varphi^{(\nu)}g' + \frac{\nu}{1!}(\varphi^{(\nu)}g' + \varphi^{(\nu-1)}g'') + \ldots + \varphi' g^{(\nu)} + \varphi g^{(\nu+1)} =$$

$$= \varphi^{(\nu+1)}g + \varphi g^{(\nu+1)} + \left[\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1}\right]\varphi^{(\nu)}g' + \left[\binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2}\right]$$

$$\varphi^{(\nu-1)}g'' + \ldots + \left[\binom{\nu}{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\right]\varphi' g^{(\nu)} =$$

$$= \varphi^{(\nu+1)}g + \binom{\nu+1}{1}\varphi^{(\nu)}g' + \binom{\nu+1}{2}\varphi^{(\nu-1)}g'' + \ldots + \binom{\nu+1}{\nu}$$

$$\varphi' g^{(\nu)} + \varphi g^{(\nu+1)}.$$

Δηλαδή η (1) ισχύει $\forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$ Επομένως η νιοστή παράγωγος της f είναι η (1).

Θέμα 6. Αν $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ δείξετε ότι:

$$f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu}\frac{\nu!}{x^{\nu+1}}\left[\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu}\right)\right] \quad (1)$$

Λύση: Για $\nu = 1$ ισχύει γιατί είναι: $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} =$

$= (-1)\frac{1}{x^2}(\ln x - 1)$. 'Εστω ότι η (1) για $\nu = \nu$ ισχύει.

Παραγωγίζουμε τα μέλη της (1) και έχουμε

$$f^{(\nu+1)}(x) = -(-1)^{\nu}\frac{\nu!(\nu+1)}{x^{\nu+2}}\left[\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu}\right)\right] +$$

$$+(-1)^{\nu}\frac{\nu!}{x^{\nu+1}}\frac{1}{x} = (-1)(-1)^{\nu}\frac{\nu!(\nu+1)}{x^{\nu+2}}\left[\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\nu+1}\right] = (-1)^{\nu+1}\frac{(\nu+1)!}{x^{\nu+2}}\left(\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1}\right)\right).$$

Δηλαδή η (1) ισχύει και για $\nu = \nu+1$ επομένως και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

Θέμα 7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\alpha)$

Δείξετε ότι $f^{(\nu)}(x) = e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\alpha + \nu\alpha)$ (1) $\nu \in \mathbb{N}^*$

Λύση: Για $\nu = 1$ ισχύει γιατί είναι:

$f'(x) = e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}(x\sigma\upsilon\nu\alpha)'\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\alpha) - e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}\eta\mu(x\eta\mu\alpha)\eta\mu\alpha =$

$= e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\alpha) - \eta\mu(x\eta\mu\alpha)\eta\mu\alpha) = e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}\sigma\upsilon\nu(\alpha + x\eta\mu\alpha)$

Έστω ότι για $\nu = \nu$ ισχύει η (1).

Τότε αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (1) παίρνουμε:

$f^{(\nu+1)}(x) = e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}(x\sigma\upsilon\nu\alpha)'\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\alpha + \nu\alpha) -$

$- e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}\eta\mu(x\eta\mu\alpha + \nu\alpha)(x\eta\mu\alpha + \nu\alpha)' = e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\alpha + \nu\alpha) -$

$- \eta\mu\alpha\eta\mu(x\eta\mu\alpha + \nu\alpha)) = e^{x\sigma\upsilon\nu\alpha}\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\alpha + (\nu+1)\alpha)$.

Άρα η (1) ισχύει και για $\nu = \nu+1$ επομένως $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

Θέμα 8. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχει παράγωγο κάθε τάξεως, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x) - f(y) = -(x-y)f(x)f(y)$ (1).

Δείξετε ότι: $f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu}\nu!\,[f(x)]^{\nu+1}\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$ (2)

Λύση: Η (1) με $x \neq y$ γίνεται:

$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = -f(x)f(y)$ (3) και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στη θέση $y \in \mathbb{R}$. Αν επομένως πάρουμε όρια στον τύπο (3) με $x \to y$ έχουμε:

$\lim\limits_{x \to y} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = -\lim\limits_{x \to y} f(x)f(y) \Rightarrow f'(y) = -f^2(y)\ \forall\ y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$f'(x) = (-1)1!f^2(x)$ και η (2) για $\nu = 1$ ισχύει.

Έστω ότι για $\nu = \nu$ ισχύει η (2).

Τότε με παραγώγιση των μελών της έχουμε:

$f^{(\nu+1)}(x) = (-1)^{\nu}\nu!(\nu+1)[f(x)]^{\nu}f'(x) =$

$= (-1)^{\nu}\nu!(\nu+1)[f(x)]^{\nu}\cdot(-1)1!f^2(x) = (-1)^{\nu+1}(\nu+1)!\,[f(x)]^{\nu+2}$

Άρα η (2) ισχύει και για $\nu = \nu+1$ επομένως ισχύει $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

Θέμα 9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa\eta\mu^4\dfrac{x}{4}$.

Δείξετε ότι η f επαληθεύει την εξίσωση

$f^2(x) + [f'(x)]^2 = f^2(x)(1 - \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x}{4})$ (1)

Λύση: Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f και την αντικαθιστούμε στην (1)

Είναι: $f'(x) = 4\kappa\eta\mu^3 \frac{x}{4}(\eta\mu \frac{x}{4})' =$

$= 4\kappa\eta\mu^3 \frac{x}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}(\frac{x}{4})' = \kappa\eta\mu^3 \frac{x}{4}\sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}$ και η (1) γίνεται:

$\kappa^2\eta\mu^8 \frac{x}{4} + \kappa^2\eta\mu^6 \frac{x}{4} \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{4} = \kappa^2\eta\mu^6 \frac{x}{4}(\eta\mu^2 \frac{x}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{4}) =$

$= \kappa^2\eta\mu^4 \frac{x}{4}\eta\mu^2 \frac{x}{4} = f^2(x)(1-\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{4})$.

Θέμα 10. Αν $f(x) = x^2 \ln x \rightarrow 2f(x)+x^2 = xf'(x)$.

Λύση: Βρίσκουμε την παράγωγο συνάρτηση της f και αντικαθιστούμε στην προς απόδειξη οπότε έχουμε:

$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x\ln x + x$.

Και η για απόδειξη γίνεται:

$2f(x)+x^2 = x(2x\ln x + x) = 2x^2\ln x + x^2$, που είναι αληθινή.

Θέμα 11. Αν $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow xf'(x) = (1-x^2)f(x)$.

Λύση: Είναι: $f'(x) = (x)'e^{-\frac{x^2}{2}} + x(e^{-\frac{x^2}{2}})' =$

$= e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}}(-\frac{x^2}{2})' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$.

Άρα $xf'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2) = (1-x^2)f(x)$

Θέμα 12. Αν $f(x) = \ln \frac{1}{1+x} \Rightarrow xf'(x)+1 = e^{f(x)}$

Λύση: Η παράγωγος συνάρτηση της f είναι:

$f'(x) = (x+1)(\frac{1}{1+x})' = -\frac{1}{x+1}$ και η για απόδειξη γίνεται:

$x(-\frac{1}{x+1})+1 = \frac{-x}{x+1}+1 = \frac{1}{x+1} = e^{f(x)}$ και λογαριθμίζοντας $\rightarrow$

$\ln(\frac{1}{1+x}) = f(x)\ln e \Rightarrow f(x) = \ln(\frac{1}{1+x})$ γιατί $\ln e = 1$.

έμα 13. Εάν $f(x) = e^x\eta\mu 3x$ δείξετε ότι: $f''(x)-2f'(x)+10f(x) =$ $= 2e^x\eta\mu 3x$ (1)

Λύση: Βρίσκουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της f και την αντικαθιστούμε στην (1).

Είναι $f'(x) = e^x\eta\mu 3x + e^x\sigma\upsilon\nu(3x)(3x)' =$

$= e^x(\eta\mu 3x+3\sigma\upsilon\nu(3x))$ (2) και $f''(x) = e^x(\eta\mu 3x+3\sigma\upsilon\nu 3x)+$

$+e^x(3\sigma\upsilon\nu 3x-9\eta\mu 3x) = e^x(6\sigma\upsilon\nu 3x-6\eta\mu 3x) = 6e^x(\sigma\upsilon\nu 3x-\eta\mu 3x)$ (3)

Η (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται:

$6e^x(\sigma\upsilon\nu 3x-\eta\mu 3x)-2e^x(\eta\mu 3x+3\sigma\upsilon\nu 3x)+10e^x\eta\mu 3x =$

$= 2e^x(3\sigma\upsilon\nu 3x-3\eta\mu 3x-\eta\mu 3x-3\sigma\upsilon\nu 3x+5\eta\mu 3x) = 3e^x\eta\mu 3x.$

Θέμα 14. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ επαληθεύει τη σχέση $4xf'(x)+2f''(x)-f(x) = 0$ (1).

Λύση: Βρίσκουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της f και αντικαθιστούμε στην (1).

Είναι: $f'(x) = e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})$ (2)

και $f''(x) = \frac{1}{2}\frac{(-\frac{1}{2})}{\sqrt[3]{x^2}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})+\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}})$

$= -\frac{1}{4x}\frac{1}{\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})+\frac{1}{4\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})$

Η (1) λόγω των (2) και (3) δίνει

$-\frac{1}{\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})+e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})-e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}} = 0$

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος των συναρτήσεων

i) $f(x) = \eta\mu x$ ii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ iii) $f(x) = \lambda e^{\lambda x}, \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

2. Όμοια των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \eta\mu\alpha x+\sigma\upsilon\nu\beta x$

ii) $f(x) = \eta\mu^2 x$

iii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$

iv) $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$

v) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$

vi) $f(x) = xe^x$

vii) $f(x) = \alpha^x, \alpha>0$

viii) $f(x) = (x-\alpha)^\nu(x-\beta)^\nu, \nu\in\mathbb{N}^*$

3. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι τετάρτης τάξεως των συναρτήσεων με τύπους:

1. $f(x) = e^x\ln x$
2. $f(x) = x^2e^x$
5. $f(x) = e^{-x}\eta\mu x$
6. $f(x) = xe^{x^2}$

3. $f(x) = x^3e^x$

4. $f(x) = x\ln x$

7. $f(x) = 5ημx+7\ln x$

8. $f(x) = x^2\ln x+4e^x$

4. Δείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = x = \frac{1}{1-x}$ είναι $f^{(ν)}(x) = ν!\,\frac{1}{(1-x)^{ν+1}}$

5. Όμοια της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $x \neq \pm 1$ είναι $f^{(ν)}(x) = \frac{ν!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{ν+1}} + \frac{(-1)^ν}{(1+x)^{ν+1}}\right]$

6. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = α_ν x^ν + α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0$ με $α_ν \neq 0$. Δείξετε ότι η τάξεως ν παράγωγος είναι $f^{(ν)}_{(x)} = ν!α_ν$.

7. Δείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της f με $f(x) = ημ^2x$ είναι: $f^{(ν)}(x) = 2^{ν-1}ημ(2x+(ν-1)\frac{π}{2})$

8. Εάν $f(x) = ασυνx+βημx$ και $g(x) = αημx-βημx$. Να υπολογιστεί η παράσταση $D(x) = f^{(μ)}(x)g^{(ν)}(x)-f^{(μ)}(x)g^{(ν)}(x)$.

9. Εάν $f(x) = x^2e^{-\frac{x}{α}}$ δείξετε ότι: $f^{(ν)}(0) = (-1)^ν\,\frac{ν(ν-1)}{α^{ν-2}}$ $\forall\, ν \in \mathbb{N}: ν \geq 2$.

10. Εάν $f(x) = x^{ν-1}e^{\frac{1}{x}}$ δείξετε ότι: $f^{(ν)}(x) = (-1)^ν\,\frac{f(x)}{x^{2ν}}$, $ν \in \mathbb{N}$.

11. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = ημ5xσυν2x$. Δείξετε ότι: $f^{(ν)}(x) = \frac{1}{2}\,7^νημ(\frac{νπ}{2}+7x)+\frac{1}{2}\,3^νσυν(\frac{νπ}{2}+3x)$.

12. Εάν $f(x) = \ln(x^2+x-2)$ δείξετε ότι: $f^{(ν)}(x) = (-1)^{ν-1}(ν-1)!\left[\frac{1}{(x-1)^ν} + \frac{1}{(x+2)^ν}\right]$

13. Αν $f(x) = \ln\frac{1}{1+x}$ δείξετε ότι: $xf'(x)+1 = e^{f(x)}$

14. Αν $f(x) = \frac{\alpha e^{\kappa x}+\beta e^{-\kappa x}}{x}$ δείξετε ότι: $xf''+2f'-\kappa^2 xf = 0$

15. Αν $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2x}}$, $x\in(0, \frac{\pi}{4})$ δείξετε ότι: $f''+f = 3f^5$

16. Αν $f(x) = (\ln x)^{e^x}$, τότε $f'(e) = e^{e-1}$

17. Αν $f(x) = x^2\ln x$, τότε $2f(x)+x^2 = xf'(x)$

18. Αν $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$, τότε $4(1+x\ )f''(x) = f(x)-4xf'(x)$

19. Αν $f(x) = \alpha e^{2x}+\beta xe^{2x}+e^x$, τότε $e^x = f''(x)-4f'(x)+4f(x)$

20. Αν $f(x) = x^2+x(1-\ln x)$ δείξετε ότι: $x^2f'''(x) = 1$

21. Αν $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ δείξετε
i) $f(x)-2\sqrt{1+x^2}f'(x) = 0$ ii) $4(1+x^2)f''(x)+4xf'(x) = f$

22. Εάν $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu(\ln x)+\beta\eta\mu(\ln x)$ δείξετε ότι
$xf''(x)+xf'(x)+f(x) = 0$

23. Εάν $f(x) = x^\nu\ln x \Rightarrow xf'(x) = x^\nu+\nu f(x)$.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^\nu/\nu\in\mathbb{N}$. Αποδείξετε ότι: $f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!} = 2^\nu$.

Λύση: Η $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, η $f''(x) = \nu(\nu-1)x^{\nu-2}$, $f'''(x) =$
$= \nu(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-3},\ldots,f^{(\kappa)}(x) = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\kappa+1)x^{\nu-\kappa}$
με $\kappa\in\mathbb{N}$ και $\kappa\leq\nu$. Μετά από αυτό είναι:
$\frac{f'(x)}{1!} = \frac{\nu}{1!}x^{\nu-1}$, $\frac{f''(x)}{2!} = \frac{\nu(\nu-1)}{2!}x^{\nu-2},\ldots,\frac{f^{(\kappa)}(x)}{\kappa!} =$
$= \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu-\kappa+1)}{\kappa!}x^{\nu-\kappa}$.

Άρα $f(x)+\frac{f'(x)}{1!}+\frac{f''(x)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} =$
$= x^\nu+\frac{\nu}{1!}x^{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}x^{\nu-2}+\ldots+1 = (x+1)^\nu$

Από αυτήν για $x = 1$, εύκολα παίρνουμε την σχέση που ζητούμε για απόδειξη.

Θέμα 2. Δείξετε ότι αν για μια συνάρτηση $f: (-a,a) \to \mathbb{R}$ ισχύει:
i) $f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$, $\forall x,-x \in (-a,a)$
ii) $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f'(x) = f(-x)$, $\forall\ x,-x \in (-a,a)$

Λύση: i) Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη και επειδή το δεύτερο μέλος είναι σύνθετη συνάρτηση έχουμε:
$f'(x) = f'(-x)(-x)' \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$

ii) Όμοια με παραγώγιση των μελών έχουμε:
$f'(x) = (-f(-x))' = -f'(-x)(-x)' \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$

Θέμα 3. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T \in \mathbb{R}-\{0\}$ τότε και η παράγωγός της είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι για μια περιοδική συνάρτηση ισχύει $f(x+\tau) = f(x)\ \forall\ x+\tau,\ x \in \mathcal{D}(f)$ και αν παραγωγίσουμε τα μέλη έχουμε: $f'(x+\tau)(x+\tau)' = f'(x) \Rightarrow f'(x) = f'(x+\tau)$.

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση f με
$f(x) = (x+z_0)^\nu+(x+z_1)^\nu+\ldots+(x+z_{\nu-1})^\nu$ όπου $z_0,z_1,\ldots,z_{\nu-1}$ ρίζες της εξίσωσης $z^\nu = 1$.
Δείξετε ότι $\nu f(x)-xf'(x) = \nu^2\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Επειδή οι βάσεις $x+z_0$, $x+z_1,\ldots,$ $x+z_{\nu-1}$ είναι εν γένει μιγαδικοί δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε την f όπως είναι δοσμένη. Γιαυτό κάνουμε τα αναπτύγματα και έχουμε:

$$f(x) = (x^\nu+\frac{\nu}{1}x^{\nu-1}z_0+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}x^{\nu-2}z_0^2+\ldots+z_0^\nu)+$$
$$+(x^\nu+\frac{\nu}{1}x^{\nu-1}z_1+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}x^{\nu-2}z_1^2+\ldots+z_1^\nu)+\ldots+$$
$$+(x^\nu+\frac{\nu}{1}x^{\nu-1}z_{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}x^{\nu-2}z_{\nu-1}^2+\ldots+z_{\nu-1}^\nu) =$$
$$= \nu x^\nu+\frac{\nu}{1}x^{\nu-1}(z_0+z_1+\ldots+z_{\nu-1})+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}x^{\nu-2}(z_0^2+z_1^2+\ldots+z_{\nu-1}^2)+$$
$$+\ldots+(z_0^\nu+z_1^\nu+\ldots+z_{\nu-1}^\nu) = \nu x^\nu+\nu$$ γιατί είναι $z_0^\nu+z_1^\nu+\ldots+z_{\nu-1}^\nu =$
$= 1+1+\ldots+1 = \nu$ και $z_0^\kappa+z_1^\kappa+\ldots+z_{\nu-1}^\kappa = 0$ με $1 \le \kappa \le \nu-1$ (1)

Πράγματι η (1) γίνεται: $(z_0)^\kappa+(z_1)^\kappa+\ldots+(z_1^{\nu-1})^\kappa =$

$= (z_1^{\kappa}) + (z_1^{\kappa}) + \ldots + (z_1^{\kappa})^{\nu-1} = \frac{(z_1^{\kappa})^{\nu}-1}{z_1^{\kappa}-1} = \frac{(z_1^{\nu})^{\kappa}-1}{z_1^{\kappa}-1} = 0$

Αν παραγωγίσουμε την f έχουμε $f'(x) = \nu^2 x^{\nu-1}$

Και η αποδεικτέα γίνεται: $\nu(\nu^{\nu}x+\nu)-x(\nu^2 x^{\nu-1}) =$
$= \nu^2 x^{\nu}+\nu^2-\nu^2 x^{\nu} = \nu^2$. Άρα ισχύει $\forall\ x\in\mathbb{R}$:
$\nu f(x)-xf'(x) = \nu^2$.

Θέμα 5. Από τό γνωστό άθροισμα της γεωμετρικής προόδου:

$$1+x+x^2+\ldots+x^{\nu} = \frac{x^{\nu+1}-1}{x-1} \quad (x\neq 1)\ (A)$$

Να βρεθούν τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\Sigma_1 = 1+2x+3x^2+\ldots+\nu x^{\nu-1}$$
$$\Sigma_2 = 1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+\nu^2x^{\nu-1}$$

Λύση: Επειδή ο (A) αληθεύει $\forall\ x\in\mathbb{R}-\{1\}$ και αν εξισώσουμε τις παραγώγους αυτών των μελών της ταυτότητας θα έχουμε:

$$\Sigma_1 = 1+2x+3x^2+\ldots+\nu x^{\nu-1} = \frac{\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1}{(x-1)^2} \qquad (x\neq 1)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα αμφότερα τα μέλη επί x παίρνουμε:

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+\nu x^{\nu} = \frac{\nu x^{\nu+2}-(\nu+1)x^{\nu+1}+x}{(x-1)^2}$$

Και παραγωγίζοντας αμφότερα τα μέλη παίρνουμε:

$$1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+\nu^2x^{\nu-1} = \frac{1+x-(\nu+1)^2x^{\nu}-(2\nu^2+2\nu-1)x^{\nu+1}-\nu x^{\nu+2}}{(1-x)^3}$$

Θέμα 6. Αν ρ_1,ρ_2,ρ_3 ρίζες διαφορετικές της τριτοβάθμιας εξίσωσης $f(x) = 0$ δείξετε ότι:

i) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \frac{1}{x-\rho_3}$

ii) $\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = 0$

Λύση: i) Γνωρίζουμε ότι το f(x) γράφεται:

$f(x) = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\ (1) \rightarrow f'(x) = \alpha(x-\rho_2)(x-\rho_3)+$
$+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_3)+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ \ (2)$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \frac{1}{x-\rho_3}$$

ii) Έχουμε όπως ξέρουμε $f(x) = c(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\ \ (c\neq 0)$

Τότε όμως: $f'(x) = c(x-\rho_2)(x-\rho_3)+c(x-\rho_1)(x-\rho_3)+$

$+c(x-\rho_1)(x-\rho_2)$.

Επειδή $f'(\rho_1) = c(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)$, $f'(\rho_2) = c(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)$, $f'(\rho_3) = c(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)$, το πρώτο μέλος της αποδεικτέας γίνεται: $\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = \frac{1}{c}\left(\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} +\right.$

$\left. + \frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)} + \frac{\rho_3}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}\right) = \frac{1}{c}0 = 0$

Θέμα 7. Δείξετε ότι αν η πραγματική ρίζα ρ του πολυώνυμου f(x) είναι πολλαπλότητας $\kappa\in N^*$ τότε η ρ είναι ρίζα της παραγώγου με πολλαπλότητα κ-1.
Με βάση το παραπάνω δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1$, $\nu\in N$ διαιρείται ακριβώς με το $(x-1)$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι αν ο αριθμός $x = \rho$ είναι ρίζα ενός πολυώνυμου με πολλαπλότητα κ τότε το $(x-\rho)^{\kappa}$ διαιρεί το πολυώνυμο.

Άρα $f(x) = (x-\rho)^{\kappa}\Pi(x)$ ($\Pi(x)$ το πηλίκο που είναι ακέραιο πολυώνυμο του x). Αν παραγωγίσουμε τα μέλη έχουμε:

$f'(x) = \kappa(x-\rho)^{\kappa-1}\Pi(x)+(x-\rho)^{\kappa}\Pi'(x) =$

$=(x-\rho)^{\kappa-1}[\kappa\Pi(x)+(x-\rho)\Pi'(x)] = (x-\rho)^{\kappa-1}\Pi_1(x)$ όπου

$\Pi_1(x) = \kappa\Pi(x)+(x-\rho)\Pi_1(x)$.

Δηλαδή είναι $f'(x) = (x-\rho)^{\kappa-1}\Pi_1(x)$ που σημαίνει ότι το πολυώνυμο $f'(x)$ έχει τον αριθμό ρ ρίζα με πολλαπλότητα κ-1.

Είναι δε $\Pi_1(\rho) \neq 0$ γιατί αν ήταν $\Pi_1(\rho) = 0 \Rightarrow \kappa\Pi(\rho) = 0 \Rightarrow$ $\rightarrow$ η ρ ρίζα του $\Pi(x)$ οπότε $\Pi(x) = (x-\rho)A(x)$ και τότε το $f(x) = (x-\rho)^{\kappa+1}A(x)$ δηλαδή ο ρ θα ήταν ρίζα του f(x) με πολλαπλότητα κ+1 που είναι άτοπο.

Για να δείξουμε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1$ διαιρείται με το $(x-1)^2$ αρκεί να δείξουμε ότι το 1 είναι ρίζα του f(x) και το 1 είναι ρίζα του $f'(x)$.

Δηλαδή: $f(1) = 0 \Leftrightarrow \nu-\nu-1+1 = 0$ και

$f'(x) = \nu(\nu+1)x^{\nu}-\nu(\nu+1)x^{\nu-1} \Rightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow \nu(\nu+1)-\nu(\nu+1)=0$

Άρα το $(x-1)^2$ διαιρεί το f(x).

Θέμα 8. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με διπλή ρίζα τον αριθμό ρ. Δείξετε ότι: $\alpha\rho^2+2\beta\rho+3\gamma = 0$.

Λύση: Επειδή ο ρ είναι διπλή ρίζα ισχύει $f(\rho) = 0$ και $f'(\rho) = 0$. Αλλά $f(\rho) = \rho^3+\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma = 0$ (1) και $f'(x) = 3x^2+2\alpha x+\beta$ $\Rightarrow f'(\rho) = 3\rho^2+2\alpha\rho+\beta = 0$ (2).

Από τις (1) και (2) απαλλοίφουμε το ρ^3.

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με -3 και την (2) με ρ και τις προσθέτουμε οπότε έχουμε:

$-3\rho^3-3\alpha\rho^2-3\beta\rho-3\gamma = 0 \wedge 3\rho^3+2\alpha\rho^2+\beta\rho = 0 \Rightarrow$

$-\alpha\rho^2-2\beta\rho-3\gamma = 0 \Rightarrow \alpha\rho^2+2\beta\rho+3\gamma = 0.$

Θέμα 9. Εάν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί διάφοροι μεταξύ τους δείξετε ότι η ταυτότητα:

$A_1e^{\alpha_1x}+A_2e^{\alpha_2x}+\ldots+A_\nu e^{\alpha_\nu x} = 0$

με $A_1,A_2,\ldots,A_\nu \in \mathbb{R}$ ισχύει όταν και μόνο όταν $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = 0$.

Λύση: Εάν $A_1e^{\alpha_1x} = 0$ προφανώς $A_1 = 0$. Δεχόμαστε ότι η πρόταση ισχύει για ν-1 το πλήθος προσθετέους, δηλαδή ότι αν:

$A_1e^{\alpha_1x}-A_2e^{\alpha_2x}+\ldots+A_{\nu-1}e^{\alpha_{\nu-1}x} = 0$ είναι $A_1 = A_2 = \ldots = A_{\nu-1} = 0$. Θεωρούμε τώρα και την ταυτότητα:

$A_1e^{\alpha_1x}-A_2e^{\alpha_2x}+\ldots+A_{\nu-1}e^{\alpha_{\nu-1}x}+A_\nu e^{\alpha_\nu x} = 0$

και διαιρούντες με $e^{\alpha_\nu x} \neq 0$ παίρνουμε:

$A_1e^{(\alpha_1-\alpha_\nu)x}+A_2e^{(\alpha_2-\alpha_\nu)x}+\ldots+A_{\nu-1}e^{(\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu)x}+A_\nu = 0$

Η παράγωγος είναι: $(\alpha_1-\alpha_\nu)A_1e^{(\alpha_1-\alpha_\nu)x}+(\alpha_2-\alpha_\nu)A_2e^{(\alpha_2-\alpha_\nu)x}+\ldots+$
$+(\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu)A_{\nu-1}e^{(\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu)x} = 0$

Και επειδή έχουμε ν-1 προσθετέους θα είναι:

$(\alpha_1-\alpha_\nu)A_1 = 0$, $(\alpha_2-\alpha_\nu)A_2 = 0,\ldots,(\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu)A_{\nu-1} = 0$

αλλά $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ διάφοροι μεταξύ τους, οπότε:

$A_1 = A_2 = \ldots = A_{\nu-1} = 0$ και συνεπώς και $A_\nu = 0$.

Θέμα 10. Εάν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu \in \mathbb{R}$ προσδιορίστε αυτά έτσι ώστε η παράγωγος της f με $f(x) = (x^\nu+\alpha_1x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_\nu)e^x$ να ταυτίζεται με το $x^\nu e^x$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση: Έχουμε $f'(x) = \pi(x)e^x+e^x(\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)\alpha_1x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_{\nu-1}) = [x^\nu+(\alpha_1+\nu)x^{\nu-1}-[\alpha_2+\alpha_1(\nu-1)]x^{\nu-2}+\ldots+(\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1})]e^x$

Και για να είναι: $f'(x) = x^\nu e^x$ θα πρέπει:

$\alpha_1+\nu = 0$ $\alpha_2+(\nu-1)\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_\nu+\alpha_{\nu-1} = 0.$

Επομένως $\alpha_1 = -\nu$, $\alpha_2 = -(\nu-1)\alpha_1$, $\alpha_3 = -(\nu-2)\alpha_2, \ldots$

και γενικώς $\alpha_\kappa = -(\nu-\kappa+1)\alpha_{\kappa-1}$

Οι οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη δίνουν:

$\alpha_\kappa = (-1)^\kappa \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\kappa+1)$

Από αυτήν δίνοντας στον κ τις τιμές 1,2,3,...,ν παίρνουμε τους $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$.

Θέμα 11. Αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ $(x>0)$ δεν μπορεί να τεθεί με την μορφή

$\ln x = \frac{F_1(x)}{F_2(x)}$ όπου $F_1(x)$, $F_2(x)$ ακέραια πολυώνυμα του x.

Λύση: Από την ταυτότητα $\ln x = \frac{F_1(x)}{F_2(x)}$ με παραγώγιση παίρνουμε: $\frac{1}{x} = \frac{F_1'(x)F_2(x)-F_1(x)F_2'(x)}{[F_2(x)]^2} \Leftrightarrow [F_2(x)]^2 =$

$= xF_1'(x)F_2(x)-xF_1(x)F_2'(x)$.

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι $\beta\alpha\theta F_1(x) = \nu \in \mathbb{N}$ και $\beta\alpha\theta F_2(x) = \nu' \in \mathbb{N}$ με $\nu \neq \nu'$ τότε το πρώτο μέλος της παραπάνω ταυτότητας θα ήταν βαθμού 2ν και το δεύτερο βαθμού ν+ν' και επειδή $\nu \neq \nu'$ θα έχουμε για τα δύο μέλη διαφορετικούς βαθμούς, άτοπο. Εάν $\nu = \nu'$ τότε το πρώτο μέλος θα είναι βαθμού 2ν, ενώ το δεύτερο θα ήταν βαθμού το πολύ 2ν-1 και πάλι άτοπο. Επομένως η παραπάνω ταυτότητα είναι αδύνατη.

Θέμα 12. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = c_1\eta\mu x+c_2\eta\mu 2x+ +\ldots+c_\nu\eta\mu(\nu x)$ για την οποία ισχύει $|f(x)| \leq |\eta\mu x|$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$. Δείξετε ότι: $|c_1+2c_2+\ldots+\nu c_\nu| \leq 1$ (1)

Λύση: Το πρώτο μέλος της (1) είναι η $f'(0) = c_1+2c_2+\ldots+\nu c_\nu$ (2).

Αλλά $|f'(0)| = \left|\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x}\right| \leq \lim\limits_{x\to0}\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = 1$

'Αρα ισχύει $|c_1+2c_2+3c_3+\ldots+\nu c_\nu| \leq 1$.

Θέμα 13. Αν οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = \alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+ +\varepsilon$ με $\alpha \neq 0$ είναι σε αριθμητική πρόοδο τότε και οι ρίζες της $f'(x)$ είναι σε αριθμητική πρόοδο.

Λύση: 'Εστω $\rho_1 = t-3\omega$, $\rho_2 = t-\omega$, $\rho_3 = t+\omega$, $\rho_4 = t+3\omega$ οι ρίζες του f(x) τότε είναι: $f(x) = \alpha(x-t+3\omega)(x-t+\omega)(x-t-\omega)(x-t-3\omega) = \alpha[(x-t)^2-9\omega^2][(x-t)^2-\omega^2] =$

$= \alpha[(x-t)^4-10\omega^2(x-t)^2+9\omega^4]$

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη έχουμε:

$f'(x) = \alpha[4(x-t)^3-20\omega^2(x-t)] = 4\alpha(x-t)[(x-t)^2-5\omega^2] =$
$= 4\alpha(x-\tau)(x-\tau-\omega\sqrt{5})(x-\tau+\omega\sqrt{5})$

Που έχει ρίζες τις $x_1 = \tau-\omega\sqrt{5}$, $x_2 = \tau$, $x_3 = \tau+\omega\sqrt{5}$

Προφανώς ανήκουν σε αριθμητική πρόοδο με λόγο $\omega\sqrt{5}$.

Θέμα 14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$f(x) = x^3+\beta^3+\gamma^3-3\beta\gamma x-(x+\beta+\gamma)(x^2+\beta^2+\gamma^2-\beta x-\gamma x-\beta\gamma)$

Δείξετε ότι: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

Λύση: Η παράγωγος της f είναι:

$f'(x) = 3x^2-3\beta\gamma-(x^2+\beta^2+\gamma^2-\beta x-\gamma x-\beta\gamma)-(x+\beta+\gamma)(2x-\beta-\gamma)$

$\forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$

Επομένως η f είναι σταθερή συνάρτηση $\forall\ x \in \mathbb{R}$, δηλ. $f(x) = c$

Άρα και για $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 = c$. Επομένως $f(x) = 0$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$, άρα και για $x = \alpha \in \mathbb{R}$. Οπότε είναι:

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$.

Θέμα 15. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με αντίστοιχες παράγωγους f_1' και f_2' για κάθε $x \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$. Εάν $\forall\ x \in \mathcal{D}$ ισχύουν:

α) $f_1'(x) = f_2(x)$ β) $f_2'(x) = -f_1(x)$ γ) $f_1(0) = 0, f_2(0)=1$

Να δειχτεί ότι: 1. $f_1^2(x)+f_2^2(x) = 1$ $\forall\ x \in \mathcal{D}$

2. Εάν F_1 και F_2 και ένα άλλο ζεύγος συναρτήσεων με τις ίδιες ιδιότητες και πεδίο ορισμού, θα είναι: $F_1(x) \equiv f_1(x)$ και $F_2(x) \equiv f_2(x)$ $\forall\ x \in \mathcal{D}$.

Λύση: Έστω $\varphi_1(x) = f_1^2(x)$ και $\varphi_2(x) = -f_2^2(x)$ και $\forall\ x \in \mathcal{D}$ υπάρχουν από την υπόθεση οι παράγωγοι των f_1 και f_2.

Θα έχουμε: $\varphi_1'(x) = 2f_1(x)f_1'(x)$ και $\varphi_2'(x) = -2f_2(x)f_2'(x)$ και επειδή $f_2(x) = f_1'(x)$ και $f_2'(x) = -f_1(x)$ θα έχουμε:

$\varphi_1'(x) = 2f_1(x)f_2(x)$ και $\varphi_2'(x) = 2f_2(x)f_1(x)$, δηλαδή ισχύει: $\varphi_1'(x) = \varphi_2'(x)$ και επομένως οι αντίστοιχες συναρτήσεις θα διαφέρουν κατά σταθερά, δηλαδή:

$\varphi_1(x)-\varphi_2(x) = c$, οπότε: $f_1^2(x)+f_2^2(x) = c$.

Αλλά από την υπόθεση υπάρχει το $f_1(0)$ και $f_2(0)$ και είναι $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 1$.

Μετά από αυτό, η προηγούμενη σχέση γίνεται, για $x = 0$,

$f_1^2(0)+f_2^2(0) = c \Rightarrow c = 1$, οπότε: $f_1^2(x)+f_2^2(x) = 1 \ \forall \ x \in \mathcal{D}$.
Έστω τώρα και το ζεύγος των συναρτήσεων F_1 και F_2 με $\mathcal{D}(F_1) \cap \mathcal{D}(F_2) = \mathcal{D}$. Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύουν από την υπόθεση: $F_1'(x) = F_2(x)$, $F_2'(x) = -F_1(x)$ και $F_1(0) = 0$, $F_2(0) = 1$ και επομένως θα ισχύει:
$F_1^2(x)+F_2^2(x) = 1 \ \forall \ x \in \mathcal{D}$
Επειδή θέλουμε να δείξουμε ότι: $F_1(x) \equiv f_1(x)$ και $F_2(x) \equiv f_2(x) \ \forall \ x \in \mathcal{D}$ αρκεί να δείξουμε, ότι οι συναρτήσεις $\sigma_1(x) = F_1(x)-f_1(x)$ και $\sigma_2(x) = F_2(x)-f_2(x)$ παίρνουν σταθερή τιμή 0. Προφανώς: $\sigma_1(0) = F_1(0)-f_1(0)$ και $\sigma_2(0) = F_2(0)-f_2(0) = 1-1 = 0$. Επί πλέον ισχύουν:
$\sigma_1'(x) = F_1'(x)-f_1'(x) = F_2(x)-f_2(x) = \sigma_2(x)$ και
$\sigma_2'(x) = F_2'(x)-f_2'(x) = -F_1(x)+f_1(x) = -\sigma_1(x)$.
Επομένως για τις συναρτήσεις: $\sigma_1(x)$ και $\sigma_2(x)$ θα ισχύει:
$\sigma_1(x)+\sigma_2(x) = c$ και για $x = 0 \to \sigma_1(0)+\sigma_2(0) = c \Rightarrow c = 0$ και άρα: $\sigma_1(x)+\sigma_2(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathcal{D}$. Τούτο σημαίνει:
$\sigma_1(x) \equiv 0$ και $\sigma_2(x) \equiv 0$, $\forall \ x \in \mathcal{D}$.
Ώστε $F_1(x) \equiv f_1(x)$ και $F_2(x) \equiv f_2(x) \ \forall \ x \in \mathcal{D}$.

Θέμα 16. Δίνεται το ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού ν με ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu \in \mathbb{R}$.
Δείξετε ότι: $(\nu-1)[f'(x)]^2 \geq \nu f(x) f''(x) \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ (1).

Λύση: Η (1) γράφεται: $\nu\{[\frac{f'(x)}{f(x)}]^2 - \frac{f''(x)f(x)}{f^2(x)}\} \geq [\frac{f'(x)}{f(x)}]^2$

$$\Leftrightarrow \nu \ \frac{[f'(x)]^2-f''(x)f(x)}{f^2(x)} \geq [\frac{f'(x)}{f(x)}]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\nu[\frac{f'(x)}{f(x)}]' \geq [\frac{f'(x)}{f(x)}]^2 \quad (2)$$

Αρκεί επομένως να υπολογίσουμε το πηλίκο $\frac{f'(x)}{f(x)}$

Αν $f(x) = \alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \dots + \frac{1}{x-\rho_\nu} \Rightarrow [\frac{f'(x)}{f(x)}]' = -[\frac{1}{(x-\rho_1)^2} + \dots + \frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}]$ (3)

Από τις (1) και (2) αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\nu[\frac{1}{(x-\rho_1)^2} + \dots + \frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}] \geq (\frac{1}{(x-\rho_1)} + \dots + \frac{1}{x-\rho_\nu})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1^2+1^2+\dots+1^2)[\frac{1}{(x-\rho_1)^2} + \dots + \frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}] \geq [\frac{1}{x-\rho_1} + \dots + \frac{1}{x-\rho_\nu}]^2$$

το οποίο ισχύει ανισότητα Lagrange.

Θέμα 17. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άρτια και παραγωγίσιμη. Δείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x) = (\frac{x^2}{2}+2)f(x)+x^2+x$ έχει παράγωγο στη θέση 0 και είναι $g'(0) = 1$.

Λύση: Επειδή η f είναι άρτια ισχύει $f(x) = f(-x) \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = -f'(-x)\ \forall\, x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(x)+f'(-x) = 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$ και με $x = 0$ παίρνουμε $f'(0) = 0$ (1)

Η παράγωγος της g είναι $g'(x) = xf(x)+(\frac{x^2}{2}+2)f'(x)+2x+1$ $\forall\, x\in\mathbb{R}$ και με $x = 0$ έχουμε $g'(0) = 2f'(0)+1 \overset{(1)}{\Rightarrow} g'(0) = 1$.

Θέμα 18. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = \alpha_0x^{\nu}+\alpha_1x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_{\nu}, \alpha_0\neq 0$ (1) με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ και βαθμού ν. Υποθέτουμε ότι αυτή έχει ν διακεκριμένες ρίζες διάφορες του μηδενός. Εάν $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\nu}$ οι ρίζες να υπολογιστούν οι παραστάσεις: $\frac{f'(x)}{f(x)}$ και $\frac{f''(x)}{f(x)}-(\frac{f'(x)}{f(x)})^2$

Με την βοήθεια των παραπάνω να υπολογιστούν τα αθροίσματα: α) $\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\rho_i}$ β) $\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\rho_i^2}$ γ) $\sum_{i<j}^{\nu}\frac{1}{\rho_i\rho_j}$

Λύση: Από την (1) προκύπτει:

$\frac{1}{\alpha_0}f(x) = x^{\nu}+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}x^{\nu-1}+\ldots+\frac{\alpha_{\nu}}{\alpha_0}$ και αν $\frac{1}{\alpha_0}f(x) = F(x)$ και $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \ldots, \frac{\alpha_{\nu}}{\alpha_0}$ τεθούν αντίστοιχα $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\nu}$ παίρνουμε:

$F(x) = x^{\nu}+\lambda_1x^{\nu-1}+\lambda_2x^{\nu-2}+\ldots+\lambda_{\nu}$ (2)

Επειδή τα πολυώνυμα f(x) και F(x) έχουν τις ίδιες ρίζες, θα έχουμε: $F(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu})$ και η παράγωγος είναι $F'(x) = (x-\rho_2)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_{\nu})+(x-\rho_1)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_{\nu})]+\ldots+$
$+[(x-\rho_1)](x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})$ και επομένως:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{1}{x-\rho_{\nu}} \quad (3)$$

Παραγωγίζοντας τώρα και τα δύο μέλη της ταυτότητας (3) παίρνουμε: $\frac{F''(x)F(x)-[F'(x)]^2}{[F(x)]^2} = -\frac{1}{(x-\rho_1)^2}-\frac{1}{(x-\rho_2)^2}-\ldots-$
$-\frac{1}{(x-\rho_{\nu})^2}$ ή $\frac{F''(x)}{F(x)}-(\frac{F'(x)}{F(x)})^2 = -(\frac{1}{(x-\rho_1)^2}+\frac{1}{(x-\rho_2)^2}+\ldots+$
$+\frac{1}{(x-\rho_{\nu})^2})$ (4)

Στη σχέση (3) θέτουμε $x = 0$ και παίρνουμε:

$$\frac{F'(0)}{F(0)} = -\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} - \ldots - \frac{1}{\rho_\nu} \text{ και επομένως } \sum_{i=1} \frac{1}{\rho_i} = -\frac{F'(0)}{F(0)}$$

Είναι όμως: $F'(x) = \nu x^{\nu-1} + \lambda_1(\nu-1)x^{\nu-2} + \ldots + \lambda_{\nu-1}$ και άρα:

$F'(0) = \lambda_{\nu-1}$. Ώστε: $\sum_{i=1} \frac{1}{\rho_i} = -\frac{\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu}$, γιατί $F(0) = \lambda_\nu \neq 0$

Στη σχέση (4) θέτουμε $x = 0$ και παίρνουμε:

$$\frac{F''(0)}{F(0)} - \left(\frac{F'(0)}{F(0)}\right)^2 = -\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} - \ldots - \frac{1}{\rho_\nu^2} \text{ και συνεπώς}$$

$$\sum_{i=1} \frac{1}{\rho_i^2} = \left(\frac{F'(0)}{F(0)}\right)^2 - \frac{F''(0)}{F(0)} \qquad (5)$$

Αλλά: $\sum_{i=1} \frac{1}{\rho_i^2} = \left(\sum_{i=1} \frac{1}{\rho_i}\right)^2 - 2\sum_{i<j} \frac{1}{\rho_i \rho_j}$ οπότε:

$$2\sum_{i<j} \frac{1}{\rho_i \rho_j} = \left(\sum_{i=1} \frac{1}{\rho_i}\right)^2 - \sum_{i=1} \frac{1}{\rho_i^2} = \left(\frac{F'(0)}{F(0)}\right)^2 - \left(\frac{F'(0)}{F(0)}\right)^2 + \frac{F''(0)}{F(0)}$$

και άρα: $\sum_{i<j} \frac{1}{\rho_i \rho_j} = \frac{1}{2} \frac{F''(0)}{F(0)}$ (6)

Επειδή $F(0) = \lambda_\nu$, $F'(0) = \lambda_{\nu-1}$ και $F''(0) = 2\lambda_{\nu-2}$. Από τις (5) και (6) έχουμε τα τελικά εξαγόμενα.

Θέμα 19. Εάν το ακέραιο πολυώνυμο $\pi(x)$ έχει ρίζες πραγματικές και διακεκριμένες, τότε το πολυώνυμο: $[\pi'(x)]^2 - \pi(x)\pi''(x)$ δεν δέχεται καμμία πραγματική ρίζα.

Λύση: Στο θέμα 18 είδαμε ότι ισχύει:

$$\frac{\pi'(x)}{\pi(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \ldots + \frac{1}{x-\rho_\nu} \qquad (1)$$

όπου $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ οι πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες του $\pi(x)$. Από την (1) με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{\pi''(x)\pi(x) - [\pi'(x)]^2}{[\pi(x)]^2} = -\frac{1}{(x-\rho_1)^2} - \frac{1}{(x-\rho_2)^2} - \ldots - \frac{1}{(x-\rho_\nu)^2} =$$

$$= -\left[\frac{1}{(x-\rho_1)^2} + \frac{1}{(x-\rho_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}\right] \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ διάφορο των $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ το δεύτερο μέλος της (2) είναι αρνητικό.

Επομένως και $\pi''(x)\pi(x) - [\pi'(x)]^2 < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ διάφορο των $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$.

Συνεπώς δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο το πολυώνυμο $[\pi'(x)]^2 - \pi(x)\pi''(x)$ να παίρνει τιμή 0 και άρα καμιά πραγματική λύση δέχεται. Το $\pi(x)$ και το $\pi''(x)\pi(x) - [\pi'(x)]^2$ καμ-

μία κοινή ρίζα έχουν. Γιατί αν $\rho \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\pi(\rho) = 0$ και $\pi''(\rho)\pi(\rho) - [\pi'(\rho)]^2 = 0$ θα ήταν και $\pi'(\rho) = 0$ και τότε το ρ θα ήταν ρίζα της παραγώγου, δηλαδή διπλή ρίζα του $\pi(x)$, άτοπο.

Θέμα 20. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\nu)$ με $x > \max\{x_1, x_2, \ldots, x_\nu\}$.

Δείξετε ότι: $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu} + \nu\dfrac{f(x)}{f'(x)} \leq x \quad (1)$

Λύση: Υπολογίζουμε το πηλίκο $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Είναι: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x-x_1} + \dfrac{1}{x-x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x-x_\nu} \quad (2)$

Και η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu} + \nu\frac{1}{\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_\nu}} \leq x \rightarrow$$

$$\frac{\nu}{\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_\nu}} \leq \frac{\nu x-(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_\nu}} \leq \frac{(x-x_1)+(x-x_2)+\ldots+(x-x_\nu)}{\nu}$$

που ισχύει η ανισότητα (Cauchy).

Ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος είτε ίσος του αρμονικού είναι δε $x-x_1, x-x_2, \ldots, x-x_\nu > 0$.

Θέμα 21. Έστω οι συναρτήσεις f και g ορισμένες στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμες σ'αυτό και ισχύει $2f^2-g^3+9 = 0$ $\forall x \in [0,2]$ (1).

Εάν $f(1) = 3$ και $f'(1) = -2$. Να βρεθούν τα $g(1)$ και $g'(1)$

Λύση: Επειδή δίνεται το $f'(1)$ και $f(1)$ παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε: $4f(x)f'(x)-3g^2(x)g'(x) = 0$ (2). Αν θέσουμε στη (2) όπου $x = 1$ παίρνουμε:

$4f(1)f'(1)-3g^2(1)g'(1) = 0 \Rightarrow -24-3g^2(1)g'(1) = 0 \quad (3)$

Αν στην (1) θέσουμε όπου $x = 1$ παίρνουμε:

$2f^2(1)-g^3(1)+9 = 0 \Rightarrow g^3(1) = 27 \Rightarrow g(1) = 3 \quad (4)$

Οπότε η (3) λόγω της (4) δίνει $g'(1) = -\dfrac{24}{27} \Rightarrow g'(1) = -\dfrac{8}{9}$

Θέμα 22. Αν για την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, α,β,γ ℝ ισχύει $|f(x)| \leq 1$ ∀ $x \in [-1,1]$ δείξετε ότι $-4 \leq f'(x) \leq 4$ ∀$x \in [-1,1]$.

Λύση: Επειδή $-1 \leq f(x) \leq 1$ ∀ $x \in [-1,1]$ θα ισχύει και για $x = -1,1,0$ οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις

$\{-1 \leq \gamma \leq 1,\ -1 \leq \alpha+\beta+\gamma \leq 1,\ -1 \leq \alpha-\beta+\gamma \leq 1\}$ (1)

Επειδή δε η σχέση $-4 \leq 2\alpha x+\beta \leq 4$ έχει το μεσαίο σκέλος της μια γραμμική συνάρτηση η οποία με $\alpha > 0$ θα είναι γνήσια αύξουσα και επειδή είναι και συνεχής θα έχει max το 4 και min το -4 για x = 1 και -1 αντίστοιχα.

Όμοια με $\alpha < 0$ θα έχει max το 4 και min το -4 για x = -1 και 1 αντίστοιχα.

Είναι αρκετό επομένως να αποδείξουμε ότι

$\{-4 \leq 3\alpha+\beta \leq 4$ και $-4 \leq -2\alpha+\beta \leq 4\}$ (2)

Από τις (1) έχουμε με πρόσθεση των δύο πρώτων

$-2 \leq \alpha+\beta \leq 2$ και $-2 \leq \alpha-\beta \leq 2$ (3) με πρόσθεση της πρώτης και τρίτης. Όμοια με πρόσθεση των (3) έχουμε $-2 \leq \alpha \leq 2$ (4)

Από τις (3) και (4) παίρνουμε με πρόσθεση: $-4 \leq 2\alpha+\beta \leq 4$ και από τις (3) και (4) αφού αλλάξουμε τα σημεία και τις προσθέσουμε παίρνουμε $-4 \leq -2\alpha+\beta \leq 4$.

Άρα οι (2) ισχύουν και επομένως είναι

$-4 \leq f'(x) \leq 4$ ∀ $x \in [-1,1]$.

Θέμα 23. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας του διαγράμματος της f στο σημείο $x_0 \neq 0$.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων επαφής των εφαπτομένων ευθειών του διαγράμματος της f των διερχομένων από την αρχή των συντεταγμένων.

γ) Εάν φ το μέτρο μιας οξείας γωνίας σε μοίρες και τεθεί $x_1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi$, ονομαστεί δε $f(x_1)$ η τιμή της f στο x_1 να υπολογιστεί η φ αν $f(x_1) = 9$.

Λύση: α) Ο τύπος της f γράφεται:

$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2} = (1-\frac{2}{x})^2$ με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\}$.

Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = 2(1-\frac{2}{x})(1-\frac{2}{x})' = 2(1-\frac{2}{x})(+\frac{2}{x^2}) =$$

$$= \frac{4}{x^2}(1-\frac{2}{x}) \ \forall \ x \in \mathcal{D}(f)-\{0\}.$$

Μετά από αυτό η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x_0 \neq 0$ του διαγράμματος της f θα είναι:

$$y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(1-\frac{2}{x_0})^2 = \frac{4}{x_0^2}(1-\frac{2}{x_0})(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{4}{x_0^2}(1-\frac{2}{x_0})x+(1-\frac{2}{x_0})(1-\frac{6}{x_0}) \qquad (1)$$

β) Οι συντεταγμένες των σημείων επαφής των εφαπτομένων ευθειών του διαγράμματος της f, των διερχομένων από την αρχή των συντεταγμένων θα βρεθούν με την βοήθεια των ριζών της εξίσωσης (2) $(1-\frac{2}{x_0})(1-\frac{6}{x_0}) = 0$, αφού η αρχή $O(0,0)$ θα πρέπει να είναι σημείο της (1). Από την εξίσωση θα έχουμε τις τετμημένες των σημείων επαφής. Βρίσκουμε $x_0 = 2$ και $x_0 = 6$. Εάν $x_0 = 2$, τότε $y_0 = 0$ και επομένως ο άξονας των x είναι μία από τις εφαπτόμενες ευθείες. Για $x_0 = 6$ βρίσκουμε: $x_0\ (\frac{4}{36})(1-\frac{2}{6})6 = \frac{4}{9}$. Ώστε τα σημεία επαφής ρ_1, ρ_2 έχουν συντεταγμένες αντίστοιχα $\rho_1(2,0)$ και $\rho_2(6,\frac{4}{9})$.

Το y_0 προκύπτει και από την $y = (1-\frac{2}{x})^2$.

γ) Επειδή $f(x_1) = 9 = y_1$, από την $y = (1-\frac{2}{x})^2$ παίρνουμε

$$9 = (1-\frac{2}{2\sigma\upsilon\nu^2\varphi})^2 = \varepsilon\varphi^4\varphi \Rightarrow \varepsilon\varphi^2\varphi = 3 \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60°.$$

Θέμα 24. Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχή και για την οποία ισχύει $f(x+x')+f(x-x') = 2f(x)f(x')$ (1) για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών x,x'.

α) Να βρείτε όλες τις σταθερές συναρτήσεις f οι οποίες, πληρούν την (1).

β) Να βρείτε από τον τύπο της (1) ένα παράδειγμα μη σταθερής συνάρτησης η οποία να πληροί την (1).

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και ότι f(0) = 1.

δ) Εάν η $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και α η μικρότερη θετική ρίζα αυτής, δείξετε ότι το διάγραμμα Γ της f έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο Μ(α,0).
ε) Δείξετε ότι η f με τις προϋποθέσεις αυτές είναι περιοδική και
στ) Εάν η f έχει πρώτη παράγωγο, θα έχουμε:
$f'(x) = -f'(a)f(x+a)$
και ότι μετά από αυτό έχει διαδοχικές παραγώγους κάθε τάξης.

Λύση: α) Έστω κ η σταθερή τιμή της f $\forall\, x \in \mathbb{R}$, τότε θα έχουμε $\kappa+\kappa = 2\kappa^2$, από την οποία $\kappa = 0$, $\kappa = 1$. Οι ζητούμενες λοιπόν συναρτήσεις είναι οι $f(x) = 0$ και $f(x) = 1$.
β) Επειδή η f έχει την μορφή του $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$ $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ μη σταθερά πληροί την συνθήκη (1).
γ) Επειδή η (1) είναι ισχυρή $\forall x,x' \in \mathbb{R}$ θα ισχύει και για $x' = 0$ και $\forall\, x \in \mathbb{R}$, δηλαδή:
$2f(x) = 2f(x)f(0)$ $\forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2f(x)(f(0)-1) = 0$
και η f δεν είναι μηδενική $\forall\, x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x_0) \neq 0$. Επομένως $f(0) = 1$. (Δεχόμαστε δηλαδή ότι δεν είναι για όλα τα x, $f(x) = 0$ ή και $f(x) = 1$).
Μετά από αυτό παρατηρούμε ότι η (1) για $x = 0$ και $\forall\, x' \in \mathbb{R}$ δίνει: $f(x')+f(-x') = 2f(x')f(0) \Rightarrow f(-x') = f(x')$ και η f είναι άρτια.
δ) Επειδή $\alpha \neq 0$ και ρίζα της $f(x) = 0$, θα είναι $f(\alpha) = 0$. Από την (1) για $x = \alpha$ παίρνουμε:
$f(\alpha+x')+f(\alpha-x') = 2f(\alpha)f(x')$ $\forall\, x' \in \mathbb{R}$
και επειδή $f(\alpha) = 0$ θα είναι: $f(\alpha+x') = -f(\alpha-x')$, δηλαδή το σημείο Μ(α,0) είναι κέντρο συμμετρίας της f. Πράγματι τα σημεία $(\alpha+x', f(\alpha+x')]$ και $[\alpha-x', f(\alpha-x')]$ έχουν τετμημένη του μέσου αυτών την $\frac{\alpha+x+\alpha-x'}{2} = \alpha$ και τεταγμένη την

$$\frac{f(\alpha+x')+f(\alpha-x')}{2} = \frac{-f(\alpha-x')+f(\alpha-x')}{2} = 0$$

ε) Επειδή $f(x+\alpha)+f(x-\alpha) = 2f(x)f(\alpha) = 0$ και από αυτή ότι: $f(x+2\alpha)+f(x) = 0$ και ότι: $f(x+3\alpha)+f(x+\alpha) = 0$ και ότι: $f(x+4\alpha)+f(x+2\alpha) = 0$, έπεται $f(x+4\alpha) = -f(x+2\alpha) = f(x)$

$\forall\ x\in\mathbb{R}$ και η f είναι περιοδική με περίοδο 4α.

στ) Αφού η f έχει πρώτη παράγωγο έστω στο $x_0\in\mathbb{R}$ θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x_0+\varepsilon)+f(2\alpha-x_0)}{\varepsilon}$$ γιατί $f(2\alpha-x_0) = -f(x_0)$ και επομένως

$$f'(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2f(\alpha+\frac{\varepsilon}{2})f(x_0-\alpha+\frac{\varepsilon}{2})}{\varepsilon}$$ (γιατί $f(\kappa)+f(\lambda) =$

$= 2f(\frac{\kappa+\lambda}{2})f(\frac{\kappa-\lambda}{2})$ αν $x+x' = \kappa$ και $x-x' = \lambda$).

'Ωστε $f'(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(\alpha+\frac{\varepsilon}{2})-f(\alpha)}{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}f(x_0-\alpha+\frac{\varepsilon}{2})$ γιατί

$f(\alpha) = 0$ και επειδή η f σαν παραγωγίσιμη είναι συνεχής θα

έχουμε: $\lim_{\varepsilon\to 0}f(x_0-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}) = f(x_0-\alpha)$.

Επομένως: $f'(x_0) = f'(\alpha)f(x_0-\alpha)$. Δηλαδή $f'(x) = f'(\alpha)f(x-\alpha)$

$\forall\ x\in\mathbb{R}$. Αλλά $f(x-\alpha) = f(\alpha-x) = -f(x+\alpha)$ και τελικά

$f'(x) = -f'(\alpha)f(x+\alpha)$. (2)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in\mathbb{R}$ και η $f(x+\alpha)$ έχει παράγωγο την $f'(x+\alpha)$ και βάσει της σχέσεις (2) θα έχουμε:

$f'(x+\alpha) = -f'(\alpha)f(x+2\alpha)$.

'Ωστε $f''(x) = -f'(\alpha)f'(x+\alpha) = [-f'(\alpha)]^2f(x+2\alpha)$ και με μαθηματική επαγωγή $f^{(\nu)}(x) = [-f'(\alpha)]^{\nu}f(x+\nu\alpha)$.

Επί πλέον ισχύει και το παρακάτω:

Εάν $f'(\alpha) = c$, επειδή $f(x+2\alpha) = -f(x)$ θα έχουμε:

$f''(x) = c^2f(x+2\alpha) = -c^2f(x)$, δηλαδή:

$f''(x)+c^2f(x) = 0$.

Θέμα 25. Αποδείξετε ότι το ακέραιο πολυώνυμο π(x) βαθμού $\nu\in\mathbb{N}$ είναι διαιρετό με την παράγωγο του όταν, και μόνο όταν είναι της μορφής $c(x-\rho)^{\nu}$. (Συντελεστές στο $\mathbb{R}$ και $\rho\in\mathbb{R}$).

Απόδειξη: Προφανώς, αν $\pi(x) = \alpha_0(x-\rho)^{\nu}$, θα έχουμε

$\pi'(x) = \alpha_0\nu(x-\rho)^{\nu-1}$ και άρα το $\pi'(x)$ διαιρεί το $\pi(x)$.

'Εστω τώρα ότι είναι: $\pi(x) = \alpha_0x^{\nu}+\alpha_1x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_{\nu-1}x+\alpha_{\nu}$ με

με $\alpha_0 \neq 0$. Η παράγωγος είναι: $\pi'(x) = \alpha_0 \nu x^{\nu-1} + \alpha_1(\nu-1)x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_{\nu-1}$ και είναι πολυώνυμο βαθμού $\nu-1$.
Εάν το $\pi'(x)$ διαιρεί το $\pi(x)$, τότε το ακέραιο πηλίκο της διαίρεσης $\pi(x):\pi'(x)$ θα είναι το πολυώνυμο πρώτου βαθμού, της μορφής $\frac{1}{\nu}x+\kappa$ $(\kappa \in \mathbb{R})$.

Επομένως θα έχουμε την ταυτότητα:

(1) $\pi(x) = \pi'(x)[\frac{1}{\nu}x+\kappa] = \frac{1}{\nu}\pi'(x)(x-\rho)$ όπου τέθηκε χάρι απλότητας $\kappa = -\frac{\rho}{\nu}$. Από την (1) παίρνουμε με παραγώγιση των μελών της: $\pi'(x) = \frac{1}{\nu}\pi''(x)(x-\rho) + \frac{1}{\nu}\pi'(x)1$ δηλαδή:

$\pi'(x) - \frac{1}{\nu}\pi'(x) = \frac{1}{\nu}\pi''(x)(x-\rho) \Leftrightarrow \pi'(x)(1-\frac{1}{\nu}) = \frac{1}{\nu}\pi''(x)(x-\rho) \Leftrightarrow (\nu-1)\pi'(x) = \pi''(x)(x-\rho)$.

Μετά από αυτό παρατηρούμε ότι ισχύει:
$(\nu-\lambda)\pi^{(\lambda)}(x) = \pi^{(\lambda+1)}(x)(x-\rho)$ (2) $\forall \lambda \in \mathbb{N}^*: \lambda \leq \nu$.
Πράγματι αν ισχύει η (2) και παραγωγίσουμε τα μέλη παίρνουμε: $(\nu-\lambda)\pi^{(\lambda+1)}(x) = \pi^{(\lambda+2)}(x)(x-\rho) + \pi^{(\lambda+1)}(x)1$
$\Leftrightarrow (\nu-\lambda-1)\pi^{(\lambda+1)}(x) = \pi^{(\lambda+2)}(x)(x-\rho)$.
Δηλαδή ισχύει: $\forall \lambda \in \mathbb{N}^*: \lambda \leq \nu$.
Από την (2) τώρα παίρνουμε διαδοχικά: $\nu\pi(x) = \pi'(x)(x-\rho)$, $(\nu-1)\pi'(x) = \pi''(x)(x-\rho) \ldots [\nu-(\nu-1)]\pi^{(\nu-1)}(x) = \pi^{(\nu)}(x)(x-\rho)$
Ενώ $\pi^{(\nu)}(x)$ είναι μια σταθερή, αφού το $\pi(x)$ είναι βαθμού ν
Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε

$1.2.3\ldots\nu\pi(x) = c_1(x-\rho)^\nu$ δηλαδή: $\pi(x) = \frac{c_1}{\nu!}(x-\rho)^\nu = c(x-\rho)^\nu$.

Θέμα 26. Αν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ ρίζες του $f(x) = x^\nu + x^{\nu-1} + \ldots + x + 1$

Δείξετε ότι $\frac{1}{1-\rho_1} + \frac{1}{1-\rho_2} + \ldots + \frac{1}{1-\rho_\nu} = \frac{\nu}{2}$

Λύση: Είναι $f(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu) \Rightarrow$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \ldots + \frac{1}{x-\rho_\nu}$ και με $x = 1$ έχουμε:

$\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{1}{1-\rho_1} + \frac{1}{1-\rho_2} + \ldots + \frac{1}{1-\rho_\nu}$ (1)

Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι $\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{\nu}{2}$ (2)

Αλλά $f(1) = \nu+1$ και $f'(x) = \nu x^{\nu-1}+(\nu-1)x^{\nu-2}+\ldots+2x+1$ που με $x = 1$ δίνει $f'(1) = \nu+(\nu-1)+(\nu-2)+\ldots+2+1 = \frac{(1+\nu)\nu}{2}$

Άρα $\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{\nu(\nu+1)}{2(\nu+1)} = \frac{\nu}{2}$.

Τελικά έχουμε από την (1) και (2) την αλήθεια της ζητούμενης σχέσης.

Θέμα 27. Να βρεθούν όλα τα ακέραια πολυώνυμα για τα οποία είναι: $[f'(x)]^2 = f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ (1)

Λύση: Για να είναι ίσα δύο πολυώνυμα $\forall\ x\in\mathbb{R}$ πρέπει κατ'αρχή να έχουν τον ίδιο βαθμό.

Αν υποθέσουμε ότι βαθ$f(x) = \nu$ τότε βαθ$f'(x) = \nu-1$ και η (1) γίνεται: βαθ.πρώτου μέλους ίσος με βαρ.δεύτερου μέλους.

Δηλαδή: $2\nu-2 = \nu \Leftrightarrow \nu = 2$.

Άρα τα ζητούμενα πολυώνυμα είναι βαθμού δευτέρου. Επομένως θα είναι της μορφής $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ με $f'(x) = 2\alpha x+\beta$ και η (1) γίνεται: $(2\alpha x+\beta)^2 = \alpha x^2+\beta x+\gamma\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

$(4\alpha^2-\alpha)x^2+(4\alpha\beta-\beta)x+\beta^2-\gamma = 0\ \forall\ x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \{4\alpha^2-\alpha = 0, 4\alpha\beta = \beta, \beta^2 = \gamma\} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}, \beta = \beta\in\mathbb{R}, \gamma = \beta$.

Άρα τα ζητούμενα πολυώνυμα είναι:

$f(x) = \frac{1}{4}x^2+\beta x+\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$.

Θέμα 28. Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (Ox,Oy) θεωρούμε τα διαγράμματα (Γ_1) και (Γ_2) των συναρτήσεων f_1 με $y = f_1(x)$ και f_2 με $f_2(x) = z = \frac{x^2}{f_1(x)}$. Η παράλληλη προς τον άξονα Oy που διέρχεται από το σημείο H του Ox με τετμημένη $x \neq 0$ τέμνει το (Γ_1) στο M_1 και το (Γ_2) στο M_2. Οι εφαπτόμενες στα M_1 και M_2 των (Γ_1) και (Γ_2) αντίστοιχα, τέμνουν τον Ox στα σημεία T_1 και T_2 αντίστοιχα.

Αποδείξετε ότι ισχύει: $\frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = \frac{2}{x}$

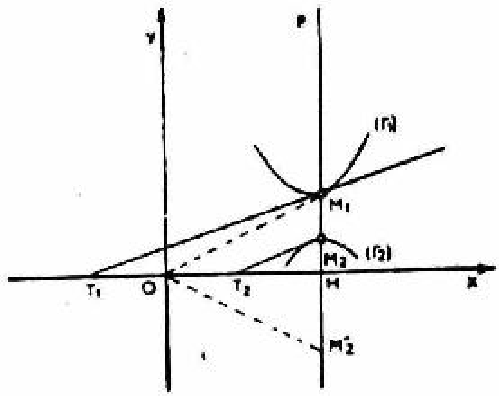
Στη συνέχεια δείξετε ότι: $\frac{1}{(\vec{HT_1})} + \frac{1}{(\vec{HT_2})} = \frac{2}{(\vec{HO})}$

και αν είναι γνωστό το M_1 να κατασκευάσετε το M_2.

Λύση: Έχουμε προφανώς $x^2 = yz$ και παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε: $2x = y'z+z'y$ και διαιρούντες με yz παίρνουμε

$$\frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = \frac{2}{x}$$

(Υποθέτουμε βέβαια ότι για την θεωρηθείσα τιμή του $x \neq 0$ η $f_1(x)$ δεν μηδενίζεται ούτε απειρίζεται).



Παρατηρούμε τώρα από την σχέση $yz = x^2$, ότι όταν γνωρίζουμε την θέση του M_1 στην HP η θέση του M_2 βρίσκεται γεωμετρικά ως εξής:

Επειδή $yz = x^2 \Leftrightarrow (\vec{HM_1})(\vec{HM_2}) = (\vec{HO})^2$ έπεται ότι το M_2 είναι η τομή της HP και του κύκλου του διερχόμενου από το M_1 και εφαπτόμενου του Ox στο O.

Είναι δυνατόν όμως να βρεθεί και ως εξής:

Εάν M_2' το συμμετρικό του M_2 ως προς τον άξονα Ox θα έχουμε $(\vec{HM_1})(\vec{HM_2'}) = -(\vec{HO})^2$, δηλαδή το M_2' ορίζεται όπως η τομή της HP και της κάθετης στην OM_1 στο O.

Γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις των εφαπτομένων των διαγραμμάτων (Γ_1) και (Γ_2) αντίστοιχα στα σημεία M_1, M_2 είναι:

$Y-y = y'(X-x)$	$M_1(x,y)$
$Y-z = z'(X-x)$	$M_2(x,z)$

Εάν Y = 0 βρίσκουμε για κάθε μία από αυτές τις τετμημένες των σημείων T_1 και T_2 αντίστοιχα (υποτίθεται $y'z' \neq 0$).

Θα έχουμε: $(\vec{OT_1}) = \frac{xy'-y}{y'} = X_1$ [δηλαδή $T_1(X_1,0)$] και $(\vec{OT_2}) = \frac{xz'-z}{z'} = X_2$ [δηλαδή $T_2(X_2,0)$].

Μετά από αυτό θα έχουμε: $(\vec{HT_1}) = (\vec{OT_1})-(\vec{OH}) = \frac{xy'-y}{y'} - x = -\frac{y}{y'}$ και $(\vec{HT_2}) = \frac{xz'-z}{z'} - x = -\frac{z}{z'}$

Επομένως: $\frac{1}{(\vec{HT_1})} + \frac{1}{(\vec{HT_2})} = -\left(\frac{y'}{y} + \frac{z'}{z}\right) = -\frac{2}{x} = -\frac{2}{(\vec{OH})}$

και άρα: $\frac{1}{(\vec{HT_1})} + \frac{1}{(\vec{HT_2})} = \frac{2}{(\vec{HO})}$

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν i) $f(x+y) = f(x)g(y)+f(y)g(x)$, $\forall\ x,y \in \mathbb{R}$

ii) $f(0) = 0$, $g(0) = 1$

iii) Υπάρχει η παράγωγος στη θέση $x = 0$ με $f'(0) = 0$ και $g'(0) = 0$. Δείξετε:

1. $f'(x) = g(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$
2. Αν $g(x+y) = g(x)g(y)-f(x)f(y)\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}$ τότε: $g'(x) = -f(x)$
3. $f''(x)+f(x) = 0$ και $g''(x)+g(x) = 0$
4. $f^2(x)+g^2(x) = 1$
5. Η f είναι περιττή και η $f \cdot g$ άρτια.

2. Έστω οι συναρτήσεις $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

i) Έχουν παραγώγους μέχρι και τρίτης τάξεως

ii) $f(x)g(x) = 1$, $g'(x) \neq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Δείξετε ότι: 1. $f(x)g(x) < 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

2. $\frac{f^{(3)}(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2 = \frac{g^{(3)}(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{g''(x)}{g'(x)}\right]^2$

3. Εάν για το ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$ ισχύει $f(\rho_1) = f''(\rho_1)$ με $f'(\rho_1) \neq 0$ δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\rho_1 - x_2} + \frac{1}{\rho_1 - x_3} + \ldots + \frac{1}{\rho_1 - x_\nu} = 0$$

4. Εάν η f είναι παραγωγίσιμη και η g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\rho) = 0$ ισχύει δε $|f(x)g(x)+cf'(x)| \leq |f(x)|\ \forall\ x \in [\alpha,\beta]$

Δείξετε ότι: $f(x) = 0\ \forall\ x \in [\alpha,\beta]$.

5. Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $|f(x)+cf'(x)| \leq M\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ δείξετε ότι η f είναι φραγμένη.

6. Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών του πολυωνύμου $f(x) = \nu x^{\nu}-(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+...+x+1)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x) = 3f(x)$. Να βρεθεί ο τύπος της f και σε συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $[f_0(x)]^2-4f_0(x)-5 = 0$ (1) όπου $f_0(x)$ λύση της (1) τέτοια ώστε $f_0(0) = 2$.

8. Έστω η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

i) $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ $\forall$ $x,y\in\mathbb{R}$

ii) $\exists$ $f'(0)$

Δείξετε ότι:

1. Η f είναι περιττή
2. $|f(x)| < 1$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$
3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = συν^2x+συν^2(120°+x)+$ $+συν^2(240°+x)$. Δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

10. Εάν $A,B,\Gamma,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ τότε να βρεθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες έτσι ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}+\Gamma e^{\gamma x}$ να είναι μηδέν $\forall$ $x\in\mathbb{R}$.

11. Θεωρούμε την οικογένεια των πολυωνύμων $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_\nu(x)$ όπου

i) $f_0(x) = 1$, ii) $f_1(x) = x$, iii) $f_\nu(x) = xf_{\nu-1}(x)+$ $+(\nu-1)f_{\nu-2}(x)$ $\forall$ $\nu\in\mathbb{N}$: $\nu\geq 2$.

Δείξετε: 1. Το $f_\nu(x)$ είναι βαθμού ν με συντελεστή ανώτατης δύναμης του x την μονάδα.

2. Ισχύει $f_\nu'(x) = \nu f_{\nu-1}(x)$

5.10. Ακρότατα μιας συνάρτησης (μέγιστο-ελάχιστο).

Σχετικά με τα ακρότατα (μέγιστο και ελάχιστο) μιας συνάρτησης f έχουμε μιλήσει και άλλοτε. Θεωρούμε σκόπιμο να επαναλάβουμε μερικά στοιχεία απαραίτητα για την μελέτη μας.

Ορισμός 1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, παρουσιάζει στη θέση $\xi \in \Delta$ ένα τοπικό μέγιστο, αντίστοιχα ένα τοπικό ελάχιστο, όταν και μόνο όταν υπάρχει ανοικτό διάστημα $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ υποσύνολο του Δ έτσι ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$, αντίστοιχα $f(x) \geq f(\xi)$ $\forall\ x \in (\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$

Ο πραγματικός αριθμός $f(\xi)$ ονομάζεται τότε, τοπικό μέγιστο, αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο, της f στην θέση $x = \xi \in \Delta$.

Το μέγιστο και το ελάχιστο (εννοούμε πάντοτε τοπικά) ονομάζονται απλά (τοπικά) ακρότατα της f στο Δ.

Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε, όπως ξέρουμε, από την θεωρία των συνεχών συναρτήσεων υπάρχουν δύο σημεία ξ_ε και ξ_μ που ανήκουν στο $[\alpha,\beta]$ έτσι ώστε: $f(\xi_\varepsilon) = \min f(x)$ και $f(\xi_\mu) = \max f(x)$, με $\alpha \leq x \leq \beta$
Προφανώς: $f(\xi_\varepsilon) \leq f(x)$ $\forall\ x \in [\alpha,\beta]$ και $f(\xi_\mu) \geq f(x)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

Επειδή η $f(\xi_\varepsilon)$ είναι η μικρότερη από όλες τις τιμές της f για $x \in [\alpha,\beta]$, αυτό ονομάζεται ολικό ελάχιστο, ενώ η $f(\xi_\mu)$ που είναι η μεγαλύτερη από όλες τις τιμές της f για $x \in [\alpha,\beta]$ ονομάζεται ολικό μέγιστο.

Σχετικά με τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει η παρακάτω πρόταση του Fermat.

5.11. Πρόταση Fermat.

Εάν μια συνάρτηση f, ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ, παρουσιάζει στην θέση $x = \xi$, όπου ξ εσωτερικό σημείο του Δ, τοπικό ακρότατο και υπάρχει η παράγωγος $f'(\xi)$ στη θέση $x = \xi \in \Delta$, τότε $f'(\xi) = 0$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στη θέση $x = \xi \in \Delta$ (ξ εσωτερικό σημείο του Δ) ένα τοπικό μέγιστο και ακόμη ότι υπάρχει η $f'(\xi)$. Αφού υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση $x = \xi \in \Delta$ θα υπάρχουν και οι πλευρικές παράγωγοι αυτής και θα είναι ίσες.

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ που περιέχει το ξ. Αφού υπάρχει το $f'(\xi)$ και υποθέτουμε ότι στη θέση $x = \xi \in \Delta$ έχουμε τοπικό μέγιστο, και το ξ εσωτερικό σημείο του Δ, θα είναι: $f(x) \leq f(\xi)$ $\forall\ x \in (\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$

και επομένως, αν $\xi < x < \xi+\varepsilon$, θα είναι: $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ και αν

$\xi-\varepsilon < x < \xi$, θα είναι: $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$

Και μεταβαίνοντας στα όρια θα έχουμε:

$$\lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \Rightarrow f'(\xi+0) \leq 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \Rightarrow f'(\xi-0) \geq 0$$

Αλλά οι πλευρικές παράγωγοι πρέπει να είναι ίσες και προς την $f'(\xi)$. Ώστε αναγκαία: $f'(\xi) = 0$.

Όμοια γίνεται η απόδειξη αν έχουμε θέση τοπικού ελάχιστου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

1. Κατ'αρχήν έχουμε να παρατηρήσουμε ότι ένα ολικό μέγιστο ή ελάχιστο είναι και τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο, ενώ ένα τέτοιο τοπικό δεν είναι πάντοτε και ολικό.

2. Κατά τις εφαρμογές πρέπει να προσέχουμε όταν εφαρμόζουμε την πρόταση Fermat, γιατί **ο μηδενισμός της παραγώγου σε ένα σημείο $\xi \in \Delta$ (εσωτερικό) δεν σημαίνει αναγκαία ότι το ξ είναι θέση ακρότατου.**

Αυτό σημαίνει ότι η συνθήκη $f'(\xi) = 0$ δεν είναι και ικανή για την ύπαρξη ακρότατου στη θέση $x = \xi \in \Delta$.

3. Στην περίπτωση στην οποία το ξ δεν είναι εσωτερικό σημείο του Δ, αλλά άκρο ενός διαστήματος, π.χ. $[\alpha,\beta]$ τότε η παράγωγος δεν μηδενίζεται πάντοτε αν και υπάρχει ακρότατο, στην θέση αυτή. Έτσι στην συνάρτηση f με $f(x) = x$ και με $\Delta = [\alpha,\beta]$ παρατηρούμε ότι η παράγωγος $f'(x) = 1 \ \forall \ x \in [\alpha,\beta]$ και παρά το ότι στο άκρο α έχουμε ελάχιστο και στο άκρο β μέγιστο, εν τούτοις η παράγωγος σε κανένα σημείο από αυτά είναι μηδέν.

4. Ακόμη πρέπει να προσέξουμε, ότι η συνάρτηση f είναι δυνατόν να παρουσιάζει σε ένα σημείο του Δ ακρότατο (τοπικό) και εν τούτοις ούτε καν να υπάρχει η παράγωγος στο σημείο αυτό.

'Ετσι γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = |x|$ δεν έχει παράγωγο στην θέση $x = 0$, παρόλα αυτά όμως έχει ελάχιστο, και μάλιστα ολικό στην θέση αυτή, γιατί $f(x) = |x| \geq 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ και $f_{min} = 0$ για $x = 0$.

5. Είναι επίσης δυνατόν να μην έχει η συνάρτηση f παράγωγο σε ένα εσωτερικό σημείο του Δ και στο σημείο αυτό να μην έχει ούτε ακρότατο (τοπικό). 'Ετσι η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[3]{x}$ με $\Delta = [-1,+1]$ δεν έχει παράγωγο στο σημείο $x = \xi = 0$ εσωτερικό του $\Delta = [-1,+1]$, αφού $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\forall x \in [-1,+1]-\{0\}$ αλλά στο σημείο αυτό ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (τοπικά) έχει, γιατί, όπως είναι αμέσως φανερό στο $[-1,+1]$, η f είναι γνήσια αύξουσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

1. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ και προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Υπάρχει η $f'(0) = 0$ και όμως δεν είναι θέση ακρότατου.

Απάντηση: Προφανώς $f'(x) = 3x^2$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ και τότε $f'(0) = 0$. Στην θέση όμως $x = 0$ η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ακρότατο, αφού αν $x_1 < x_2$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, θα είναι και $f(x_1) < f(x_2)$ και η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}$. Υπάρχει παράγωγος στην θέση $x = 0$. Υπάρχει ακρότατο στην θέση αυτή;

Απόδειξη: Πρέπει: $1-\sqrt[5]{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ και επομένως:

$\mathcal{D}(f) = [-1,+1]$. Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}\,\sqrt[5]{x}}$$

Και προφανώς δεν υπάρχει στη θέση $x = 0$.

Επειδή όμως είναι: $\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}} < 1$ $\forall\, x \in [-1,1]-\{0\}$, έπεται ότι $f(x) < 1$ $\forall\, x \in [-1,1]-\{0\}$, ενώ για $x = 0$ παίρνει την τιμή $f(0) = 1$, η οποία αποτελεί προφανώς μέγιστο της f στη θέση $x = 0$.

5.12. Θεώρημα του Rolle

Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο ανοικτό διάστημα (α,β) και εάν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Απόδειξη: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Η f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ και

β) Η f να μην είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$.

Στην πρώτη περίπτωση κατά την οποία η f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ και προφανώς συνεχής σ'αυτό, θα έχουμε:

$f(x) = f(\alpha) = f(\beta) = c$ αν $f(x) = c$ και αυτό $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$.

Η παράγωγος της f στο (α,β) υπάρχει $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$ και είναι όπως ξέρουμε, $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$, (προφανώς $\forall\, \xi \in (\alpha,\beta)$) και η πρόταση ισχύει.

Στην δεύτερη περίπτωση κατά την οποία η f δεν είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, αλλά είναι συνεχής σ'αυτό και ισχύει: $f(\alpha) = f(\beta)$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστο $x \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(x) > f(\alpha) = f(\beta)$ ή $f(x) < f(\alpha) = f(\beta)$, αφού η f δεν είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$.

Έστω ότι είναι $f(x) > f(\alpha) = f(\beta)$ (1)

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in [\alpha,\beta]$, στο οποίο η f παίρνει την μέγιστη των τιμών της και επομένως: $f(\xi) = \max f(x)$, δηλαδή: $f(\xi) \geq f(x)$ $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$, και βάσει της (1) είναι $\xi \neq \alpha$ και $\xi \neq \beta$, άρα $\xi \in (\alpha,\beta)$. Επειδή $\alpha \leq x \leq \beta$, τότε:

αν $\xi < x \leq \beta$, θα είναι: $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$, και

αν $\alpha \leq x < \xi$, θα είναι: $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$.

Αλλά από την υπόθεση υπάρχει η παράγωγος της f στην θέση $x = \xi \in (\alpha,\beta)$ και επομένως υπάρχει και το:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi+0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi-0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi)$$

και βάσει των προηγούμενων σχέσεων θα είναι:

$$\lim_{x\to\xi+0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \text{ και } \lim_{x\to\xi-0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$$

το οποίο σημαίνει: $f'(\xi) = 0$.
'Ομοια εργαζόμαστε αν $f(x) < f(\alpha) = f(\beta)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Οι υποθέσεις που έγιναν για την ισχύ του θεωρήματος του Rolle, δηλαδή οι:
α) Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
β) Η f παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (α,β)
γ) $f(\alpha) = f(\beta)$,
ονομάζονται συνθήκες του Rolle.

2. Καμμία από τις συνθήκες αυτές δε μπορεί να παραλειφθεί κατά τις εφαρμογές, γιατί είναι δυνατόν να οδηγηθούμε σε λάθος συμπεράσματα, όπως αποδεικνύουν τα παρακάτω παραδείγματα:
α) Η συνέχεια της f στο $[\alpha,\beta]$ δεν μπορεί να παραλειφθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} - 2 & \text{αν } x \in (0,1] \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Να εξεταστεί αν υπάρχει $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Απάντηση: Η συνάρτηση είναι κατ'αρχήν εντελώς ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.
Εξετάζουμε αν είναι συνεχής στο $[0,1]$.
Γιαυτό εξετάζουμε το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ αν συμπίπτει με το $f(0) = 0$.

'Εχουμε: $\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{2}{x} - 2\right) = +\infty$.
Επομένως η f δεν είναι παντού συνεχής στο $[0,1]$ γιατί είναι ασυνεχής στη θέση $x = 0$.
Παρατηρούμε ότι ισχύει $f(0) = f(1) = 0$.
Βρίσκουμε την $f'(x)$, η οποία είναι $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ $\forall\ x \in (0,1)$
και προφανώς είναι $f'(x) \neq 0$ $\forall\ x \in (0,1)$, δηλαδή δεν υπάρχει $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$ και το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει.
'Ωστε η υπόθεση της συνέχειας της f παντού στο $[\alpha,\beta]$ δεν

μπορεί να παραλειφθεί.

β) Η ύπαρξη παραγώγου τουλάχιστο στο (α,β) δεν μπορεί να παραλειφθεί.

2. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[3]{x^2}-1$ και με $[\alpha,\beta] = [-1,1]$. Να εξεταστεί αν υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Απάντηση: Προφανώς η f είναι παντού ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,+1]$. Επίσης η f είναι παντού συνεχής στο $[-1,+1]$. Επίσης είναι: $f(1) = f(-1) = 0$.

Μας μένει λοιπόν να εξετάσουμε αν υπάρχει η παράγωγος αυτής τουλάχιστον στο $(-1,1)$. Αλλά η παράγωγος της f στην θέση $x = 0$ δεν υπάρχει.

Πράγματι: $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{(\sqrt[3]{x^2}-1)-(-1)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ και $f'(x) = (\sqrt[3]{x^2}-1)' =$

$= (\sqrt[3]{x^2})' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$.

Είναι επομένως $f'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (-1,1)$ και άρα δεν υπάρχει $\xi \in (-1,+1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$ και το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει.

Ώστε η f είναι παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (α,β) δεν μπορεί να παραλειφθεί.

γ) Η υπόθεση $f(\alpha) = f(\beta)$ δεν μπορεί να παραλειφθεί.

Παράδειγμα 3. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 2x^4$ και $[\alpha,\beta] = [1,2]$. Να εξεταστεί αν υπάρχει $\xi \in (1,2)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Απάντηση: Προφανώς η f είναι παντού ορισμένη στο $[1,2]$ και παντού συνεχής σ'αυτό.

Επίσης η f παραγωγίζεται παντού στο $(1,2)$ και η παράγωγος αυτής είναι: $f'(x) = 8x^3\ \forall\, x \in (1,2)$, αλλά δεν ισχύει: $f(1) = f(2)$ αφού $f(1) = 2 \neq 32 = f(2)$.

Προφανώς είναι $f'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (1,2)$ και επομένως δεν υπάρχει $\xi \in (1,2)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$, το συμπέρασμα του θεωρή-

ματος δεν ισχύει και η συνθήκη $f(\alpha) = f(\beta)$ δεν μπορεί να παραλειφθεί.

Παρατήρηση 3. Παρακολουθήστε τώρα το παρακάτω παράδειγμα, το οποίο διαφέρει από το προηγούμενο στο ότι: $[\alpha,\beta] = [-1,2]$.
Έχουμε δηλαδή $f(x) = 2x^4$ και $[\alpha,\beta] = [-1,2]$. Σύμφωνα με τα παραπάνω η μόνη συνθήκη που δεν πληρούται είναι η $f(\alpha) = f(\beta)$, γιατί εδώ $f(-1) = 2$ και $f(2) = 32$, αλλά υπάρχει $\xi \in (-1,2)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.
Πράγματι $f'(x) = 8x^3$ και για $x = \xi = 0$ είναι: $f'(\xi) = f'(0) = 0$.

Αυτό αποδεικνύει, ότι αν παραλείψουμε μια από τις συνθήκες, είναι δυνατόν να μην οδηγηθούμε σε άτοπο, πράγμα που σημαίνει ότι οι συνθήκες του Rolle είναι ικανές, ώστε να υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f'(\xi) = 0$, όχι όμως και αναγκαίες.

Παρατήρηση 4. Το θεώρημα του Rolle έχει εφαρμογή και ακόμη όταν για κάποιο x_0 εσωτερικό σημείο του (α,β) η παράγωγος στη θέση $x = x_0 \in (\alpha,\beta)$ απειρίζεται. Αυτό συμβαίνει, γιατί, κανένας περιορισμός δεν υφίσταται για την παράγωγο σε όλα τα σημεία του (α,β), αρκεί η f να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, αφού ο περιορισμός της παραγώγου σε ένα σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ εκφράζει απλώς ότι η εφαπτόμενη του διαγράμματος της f στο σημείο αυτό είναι παράλληλη στον άξονα των y.

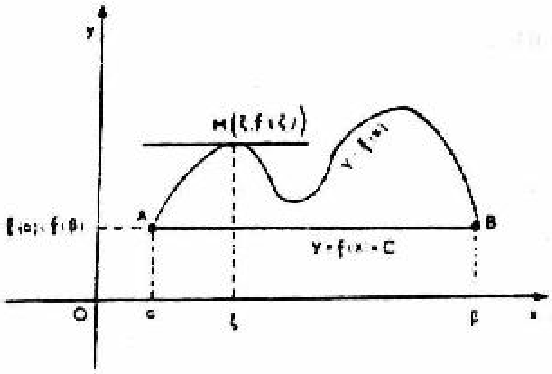
Σημείωση: Παρακάτω μετά την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle αναφέρουμε και άλλα παραδείγματα, στα οποία δεν εφαρμόζεται το θεώρημα, με την γραφική τους παράσταση.

5.13. Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle

Η συνάρτηση f με $f(x) = c \ \forall\, x \in [\alpha,\beta]$ έχει διάγραμμα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που είναι παράλληλο στον άξονα των x.

Επειδή $f'(x) = 0 \ \forall\, x \in [\alpha,\beta]$, έπεται ότι η εφαπτόμενη στο διάγραμμα της f είναι παράλληλη στον άξονα των x σε κάθε ση-

σημείο $x \in (\alpha,\beta)$ (συμπίπτει με την ΑΒ).

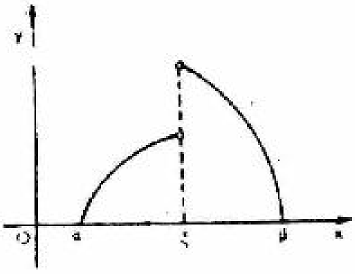


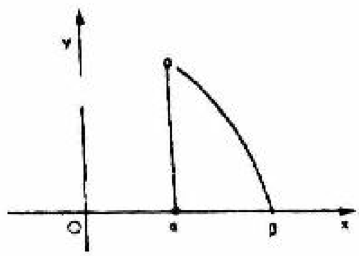
Στην περίπτωση κατά την οποία η f δεν είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, τότε το διάγραμμα της f είναι μια συνεχής γραμμή, η οποία αναχωρεί από το σημείο $A[\alpha,f(\alpha)]$ και καταλήγει στο σημείο $B[\beta,f(\beta)]$. Σε κάθε σημείο της γραμμή μεταξύ των Α και Β υπάρχει και μία εφαπτομένη, όχι παράλληλη στον άξονα των x. Το θεώρημα του Rolle μας πληροφορεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραμμής (διάφορο των άκρων), όπου η εφαπτόμενη της γραμμής σ'αυτό είναι παράλληλη στον άξονα των x. Στο σχήμα στο σημείο $M[\xi,f(\xi)]$ η εφαπτόμενη της γραμμής είναι παράλληλη στον άξονα των x. Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι δεν είναι και το μοναδικό.

Παράδειγμα 1. Η f με $f(x) = x^2-4x+3$ και $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ στο κλειστό διάστημα $[1,3]$ είναι προφανώς συνεχής και παραγωγίσιμη $\forall\ x \in (1,3)$ με $f'(x) = 2x-4$ και $f(1) = f(3) = 0$.
Στο διάστημα αυτό το σημείο ξ είναι μοναδικό, γιατί $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 2$.

Παράδειγμα 2. Η f με $f(x) = x^3-x$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Στο διάστημα $[-1,1]$ είναι: $f(-1) = f(1) = 0$ και επειδή $f'(x) = 3x^2-1$, υπάρχουν δύο σημεία $\xi_1,\xi_2 \in (-1,+1)$, ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$, είναι τα

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ και } \xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}.$$





Η προϋπόθεση της συνέχειας στο $[\alpha,\beta]$ είναι απαραίτητη για την ύπαρξη του $\xi \in (\alpha,\beta)$

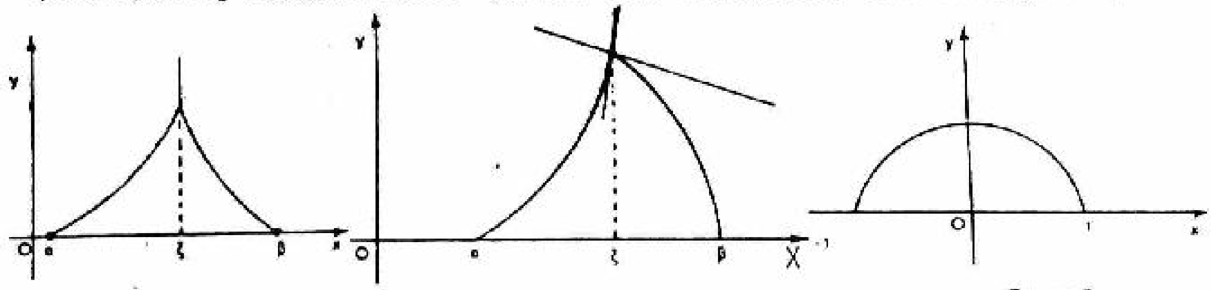
Στο πρώτο σχήμα η συνάρτηση είναι αύξουσα στο $[\alpha,\xi]$, ασυνεχής στο ξ, και φθίνουσα στο $[\xi,\beta]$.

Στο δεύτερο σχήμα φαίνεται ότι η συνέχεια στα άκρα α,β είναι απαραίτητη.

Παράδειγμα 3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{αν } x \neq 1 \\ 0 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

και ισχύει $f(1) = f(2) = 0$ και είναι συνεχής στο $(1,2]$, όχι όμως και στο $[1,2]$ και το θεώρημα του Rolle δεν έχει εφαρμογή.

Η προϋπόθεση της ύπαρξης παραγώγου στο $\xi \in (\alpha,\beta)$ πεπερασμένης ή και άπειρης είναι απαραίτητη. Στο πρώτο σχήμα το διάγραμμα της f έχει για μια τιμή $x = \xi \in (\alpha,\beta)$ εφαπτόμενη, παράλληλη προς τον άξονα των y και στο δεύτερο σχήμα οι εφαπτόμενες σχηματίζουν γωνία και επομένως δεν υπάρχει η πα-



ραγωγος της f στο ξ. Έτσι αν $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{αν } x \in [1,2] \\ 3-x & \text{αν } x \in [2,3] \end{cases}$

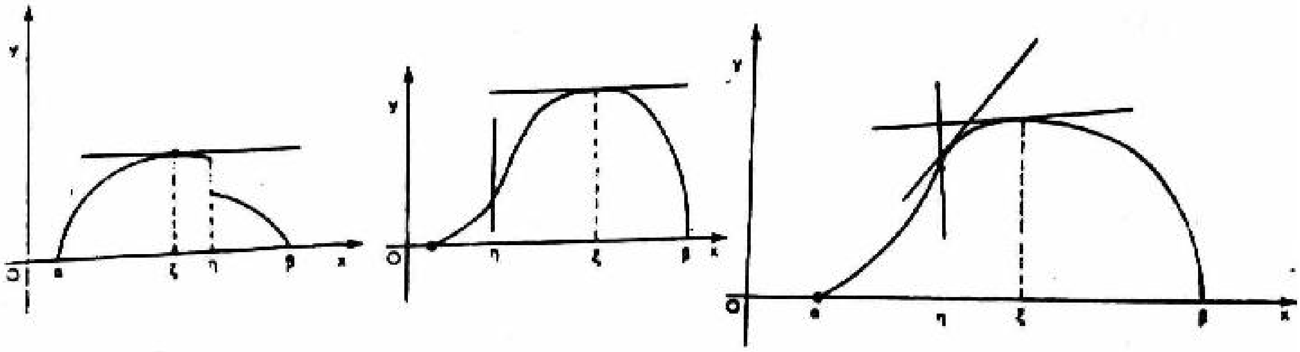
δεν υπάρχει παράγωγος στη θέση $x = 2$ και το θεώρημα δεν έχει εφαρμογή.

Αντίθετα, η ύπαρξη παραγώγου στα άκρα δεν είναι απαραίτητη, όπως φαίνεται από το τρίτο σχήμα, αναφερόμενο στη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και με διάστημα το $[-1,1]$. Υπάρχει εδώ $\xi \in (-1,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$ είναι το $\xi = 0$, ενώ οι παράγωγοι, στα άκρα απειρίζονται.

Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν ότι οι συνθήκες του Rolle είναι ικανές όχι όμως και αναγκαίες για την ύπαρξη του $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Το θεώρημα του Rolle εφαρμόζεται ακόμη και όταν για την συνάρτηση f ισχύουν:

1. Η f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ ή $(-\infty,\beta]$,
2. Η f' εντελώς ορισμένη στο $(\alpha,+\infty)$ ή $(-\infty,\beta)$.



3. $f(\alpha) = 0$ και το $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ή $f(\beta) = 0$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Αυτά γίνονται αμέσως φανερά και από τα παρακάτω σχήματα.



5.14. Θεώρημα της μέσης τιμής (Lagrange)

Εάν η συνάρτηση f με $\mathcal{D}(f) = [\alpha,\beta]$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (α,β), τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Απόδειξη: Γι'αυτό θεωρούμε την συνάρτηση f_1 με τύπο:

$f_1(x) = f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και με $\mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(f) = [\alpha,\beta]$.

Η συνάρτηση f_1 πληροί τις συνθήκες του Rolle γιατί:

α) Είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

β) Υπάρχει η παράγωγος αυτής η οποία είναι:

$f_1'(x) = -f'(x)+\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ \forall\ x \in (\alpha,\beta)$

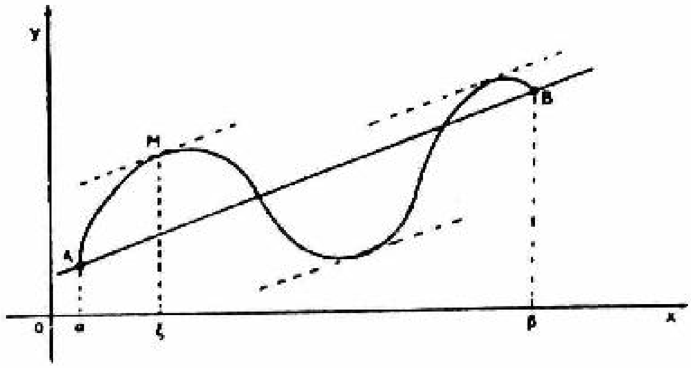
γ) $f_1(\alpha) = f_1(\beta) = 0$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε: $f_1'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f_1'(\xi) = -f'(\xi)+\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Σημείωση: Το θεώρημα λέγεται και "θεώρημα των πεπερασμένων αυξήσεων".

5.15. Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος.

Το διάγραμμα μιας συναρτήσεως f η οποία πληροί τις συνθήκες του Rolle στο [α,β] είναι ένα τόξο του οποίου η χορδή είναι παράλληλη με τον άξονα των x. Η ισχύς του θεωρήματος μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός σημείου επί του τόξου στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς τον άξονα x'Ox και επομένως παράλληλη προς την χορδή AB.



Στην περίπτωση του θεωρήματος της μέσης τιμής διατηρόντας τις δύο πρώτες υποθέσεις, δηλαδή την συνέχεια της f και την παραγωγισιμότητα αυτής, αλλά παραλείποντας την συνθήκη f(α)= = f(β), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα, ότι υπάρχει σημείο στο τόξο στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την χορδή AB, αλλά τώρα "πλάγια".

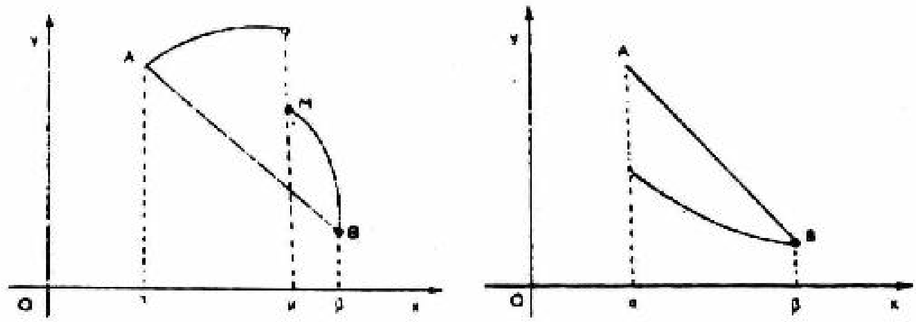
Πράγματι στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής διεύθυνσης λ της AB είναι $\lambda = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και το θεώρημα της μέσης τιμής μας πληροφορεί σχετικά με την ύπαρξη ενός τουλάχιστο σημείου M, το οποίο αντιστοιχεί στο $\xi \in (\alpha,\beta)$, στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη της AB.

Παρατήρηση 1. Το β-α εκφράζει την αύξηση της μεταβλητής μεταξύ των β και α και το f(β)-f(α) την αντίστοιχη αύξηση της συνάρτησης και στο θεώρημα χρησιμοποιούμε τις αυξήσεις αυτές οι οποίες είναι πεπερασμένες ονομάζεται, όπως είπαμε,

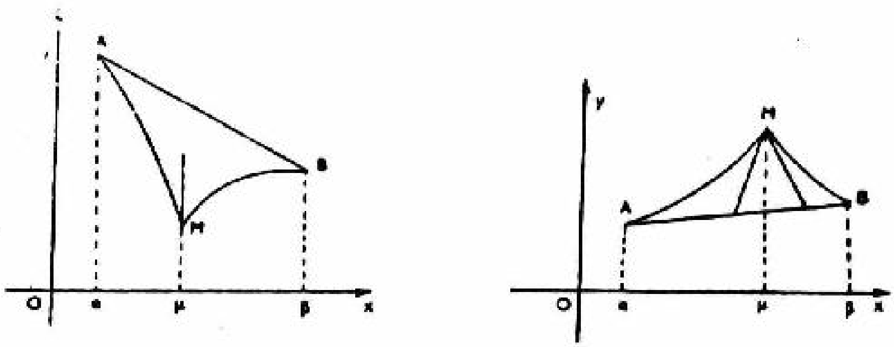
θεώρημα των πεπερασμένων αυξήσεων σε αντίθεση των απειροστών που χρησιμοποιούμε συχνά στην Ανάλυση.

Παρατήρηση 2. 'Οπως φαίνεται στο σχήμα το σημείο Μ δεν είναι το μοναδικό πάντοτε.

Παρατήρηση 3. 'Οπως και στην περίπτωση του θεωρήματος του Rolle η συνέχεια της f στο [α,β] είναι απαραίτητη, όπως δείχνουν τα σχήματα.



Επίσης η ύπαρξη παραγώγου είναι απαραίτητη στο (α,β), όπως δείχνουν τα παρακάτω σχήματα



Παρατήρηση 4. 'Οπως και στο θεώρημα του Rolle έτσι και εδώ οι συνθήκες είναι ικανές για την ύπαρξη του ξ έτσι ώστε:

$f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ αλλά δεν είναι αναγκαίες.

5.16. Γενικευμένο θεώρημα της μέσης τιμής (Cauchy)

Εάν οι συναρτήσεις f_1 και f_2 ορισμένες στο [α,β] και συνεχείς σ'αυτό είναι παραγωγίσιμες τουλάχιστον στο (α,β) και $f_2'(x) \neq 0$ ∀ $x \in (\alpha,\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε:

$$\frac{f_1'(\xi)}{f_2'(\xi)} = \frac{f_1(\beta)-f_1(\alpha)}{f_2(\beta)-f_2(\alpha)}$$

Απόδειξη: Κατ'αρχήν δείχνουμε εύκολα, ότι δεν είναι $f_2(\beta) = f_2(\alpha)$. Γιατί αν αυτό συνέβαινε, τότε κατά το θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f_2'(\xi) = 0$, άτοπο, αφού από την υπόθεση $f'(x) \neq 0$ $\forall$ $x \in (\alpha,\beta)$.

Εάν τώρα θεωρήσουμε την συνάρτηση F με:

$$F(x) = f_1(x) - f_1(\alpha) - \frac{f_1(\beta)-f_1(\alpha)}{f_2(\beta)-f_2(\alpha)}\,(f_2(x)-f_2(\alpha))$$

με $\mathcal{D}(F) = [\alpha,\beta]$, τότε γι'αυτήν ισχύουν οι συνθήκες του Rolle, γιατί:

α) Είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

β) Υπάρχει η παράγωγος αυτής στο (α,β) και είναι:

$$F'(x) = f_1'(x) - \frac{f_1(\beta)-f_1(\alpha)}{f_2(\beta)-f_2(\alpha)}\, f_2'(x) \quad \forall\ x \in (\alpha,\beta)$$

γ) $F(\alpha) = F(\beta) = 0$

Επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $F'(\xi) = 0$

Άρα: $F'(\xi) = f_1'(\xi) - \dfrac{f_1(\beta)-f_1(\alpha)}{f_2(\beta)-f_2(\alpha)}\, f_2'(\xi) = 0 \iff$

$$\iff \frac{f_1'(\xi)}{f_2'(\xi)} = \frac{f_1(\beta)-f_1(\alpha)}{f_2(\beta)-f_2(\alpha)}$$

Θεώρημα. Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη $\forall$ $x \in \mathcal{D}(f)$ και ισχύει: $f'(x) = 0$ $\forall$ $x \in \mathcal{D}(f)$, τότε η f είναι μια σταθερά στο $\mathcal{D}(f)$ και αντίστροφα.

Απόδειξη: Γιατί αν $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}(f)$ με $\xi_1 < \xi_2$, τότε η f στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ είναι εντελώς ορισμένη, συνεχής σ'αυτό και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) και τότε, κατά το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ έτσι ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}$$

Αλλά $f'(\xi) = 0$ από την υπόθεση. Οπότε αφού $\xi_1 \neq \xi_2$ θα είναι και $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ και αυτό $\forall$ ξ_1, $\forall$ $\xi_2 \in \mathcal{D}(f)$. Επομένως αφού $\forall$ $x \in \mathcal{D}(f)$ είναι $f(x) = c$, έπεται η f σταθερά στο $\mathcal{D}(f)$.
Το αντίστροφο είναι απλό.

Παράδειγμα 1. Να αποδειχτούν οι ταυτότητες:

i) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2\right]$

ii) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

iii) $\ln\frac{\alpha}{\beta} = \ln\alpha - \ln\beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}^*_+$

Λύση: i) Θεωρούμε την συνάρτηση f με

$f(x) = x^2+\beta^2+\gamma^2+\beta x+\beta\gamma+\gamma x - \frac{1}{2}[(x+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+x)^2]$

Η f είναι παραγωγίσιμη $\forall\ x\in\mathbb{R}$ και είναι

$f'(x) = 2x+\beta+\gamma-\frac{1}{2}(2x+2\beta+2x+2\gamma) = 0$. Άρα $f(x) = c\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Επομένως και με $x = 0$ βρίσκουμε $c = 0$.

Συνεπώς έχουμε $\forall\ x\in\mathbb{R},\ f(x) = 0 \Rightarrow x^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha x+\beta\gamma+\gamma x =$

$= \frac{1}{2}(x+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+x)^2\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ οπότε και με $x = \alpha$ θα ισχύει: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{1}{2}[(\beta+\alpha)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2]$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x - 4\sigma\upsilon\nu^3 x + 3\sigma\upsilon\nu x$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = -3\eta\mu 3x+12\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x-3\eta\mu x = -3(3\eta\mu x-4\eta\mu^3 x)+$

$+12\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x-3\eta\mu x = -9\eta\mu x+12\eta\mu^3 x+12(1-\eta\mu^2 x)\eta\mu x-3\eta\mu x = 0$

$\forall\ x\in\mathbb{R}$. Επομένως $f(x) = c\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ και με $x = 0 \Rightarrow f(x) = c = 0$

Άρα είναι: $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$ θέτοντας όπου $x = \alpha$.

iii) Θεωρούμε την συνάρτηση f με

$f(x) = \ln\frac{x}{\beta} - \ln x + \ln\beta$ που είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$. Άρα $\forall\ x\in(0,+\infty)$ είναι

$f(x) = c$ και με $x = 1 \Rightarrow c = 0$ οπότε $\forall\ x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{x}{\beta} - \ln x - \ln\beta = 0\ \forall\ x\in(0,+\infty)$. Άρα και με

$x = \alpha\in\mathbb{R}^*_+$ έχουμε $\ln\frac{\alpha}{\beta} = \ln\alpha - \ln\beta$.

Παράδειγμα 2. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2(120°+x)+\sigma\upsilon\nu^2(240°+x)$ είναι σταθερή.

Λύση: Είναι αρκετό να δείξουμε ότι η παράγωγος της f είναι μηδέν.

Είναι: $f'(x) = -2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu(120°+x)\eta\mu(120°+x) -$

$-2\sigma\upsilon\nu(240°+x)\eta\mu(240°+x) = -\eta\mu 2x - \eta\mu(240°+2x) - \eta\mu(480°+2x) =$

$= -\eta\mu 2x - 2\eta\mu(360°+2x)\sigma\upsilon\nu 120° =$

$= -\eta\mu 2x - 2\eta\mu 2x(-\frac{1}{2}) = -\eta\mu 2x + \eta\mu 2x = 0.$

Δηλαδή είναι $f'(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f είναι σταθερή.

Θεώρημα: Εάν οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι ορισμένες στο $\mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) = \mathcal{D}$ και παραγωγίσιμες στο $\mathcal{D}$ και ισχύει $f_1'(x) = f_2'(x) \ \forall \ x \in \mathcal{D}$, τότε αυτές διαφέρουν κατά σταθερά δηλαδή: $f_1(x) = f_2(x)+c \ \forall \ x \in \mathcal{D}$, και αντίστροφα.

Απόδειξη: Γιατί αν θεωρήσουμε την συνάρτηση F με $F(x) = f_1(x)-f_2(x)$ με $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}$ θα έχουμε:
$F'(x) = f_1'(x)-f_2'(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathcal{D}$. Τότε όμως: $F(x) = c$, άρα $f_1(x) = f_2(x)+c$. Προφανώς το αντίστροφο είναι απλό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το γενικευμένο θεώρημα της μέσης τιμής (Cauchy) ισχύει και όταν οι παράγωγοι των συναρτήσεων f_1 και f_2 απειρίζονται, όχι όμως συγχρόνως σε ένα σημείο του διαστήματος (α,β)

2. Εάν στο θεώρημα Cauchy υποτεθεί ότι $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$, τότε $\forall \ x \in (\alpha,\beta)$ υπάρχει $\xi \in (\alpha,x)$ έτσι ώστε:

$$\frac{f_1'(\xi)}{f_2'(\xi)} = \frac{f_1(x)-f_1(\alpha)}{f_2(x)-f_2(\alpha)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

3. Στο θεώρημα Cauchy αν υποτεθεί ότι $f_2(x) = x$, θα έχουμε

$$\frac{f_1'(\xi)}{f_2'(\xi)} = \frac{f_1(\beta)-f_1(\alpha)}{f_2(\beta)-f_2(\alpha)} \qquad (1)$$

Αλλά $f_2'(x) = 1$ και άρα $f_2'(\xi) = 1$ και $f_2(\beta)-f_2(\alpha) = \beta-\alpha$ και η (1) γίνεται:

$$f_1(\beta)-f_1(\alpha) = (\beta-\alpha)f_1'(\xi)$$

και έτσι έχουμε το θεώρημα της μέσης τιμής του Lagrange.

4. Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$f(\beta)-f(\alpha) = (\beta-\alpha)f'(\xi) \text{ με } \alpha < \xi < \beta \quad \text{και όμοια:}$$

$$f(\alpha)-f(\beta) = (\alpha-\beta)f'(\xi) \text{ με } \beta < \xi < \alpha$$

και επομένως χωρίς να εξετάσουμε την σχέση μεγέθους των α και β μπορούμε να γράφουμε:

$$f(x_1)-f(x_2) = (x_1-x_2)f'(\xi)$$

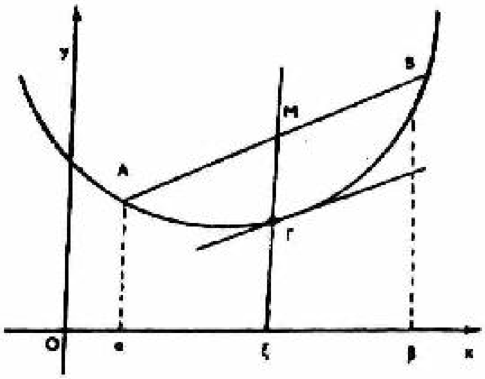
με ξ μεταξύ x_1 και x_2 (γνήσια).
Εάν τώρα τεθεί $\beta = \alpha+\varepsilon \Leftrightarrow \beta-\alpha = \varepsilon$, τότε αν ξ μεταξύ α και $\alpha+\varepsilon$ θα έχουμε ότι το $\xi-\alpha$ θα βρίσκεται μεταξύ 0 και ε και συ-

νεπώς το $\frac{\xi-\alpha}{\varepsilon}$ θα βρίσκεται μεταξύ 0 και 1. Εάν δε τεθεί

$\frac{\xi-\alpha}{\varepsilon} = \theta$ με $0<\theta<1$, θα έχουμε: $\xi = \alpha+\varepsilon\theta$ και τότε ο τύπος που εκφράζει το θεώρημα της μέσης τιμής παίρνει την μορφή

$$f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha) = \varepsilon f'(\alpha+\varepsilon\theta) \text{ με } 0<\theta<1$$

Παράδειγμα 1. Να γίνει εφαρμογή του τύπου αυτού στην συνάρτηση f με $f(x) = x^2+px+q/\ p,q\in\mathbb{R}$.



Απάντηση: Η f πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος αυτής είναι: $f'(x) = 2x+p$.
Έχουμε: $f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha) = (\alpha+\varepsilon)^2+p(\alpha+\varepsilon)+q-\alpha^2-p\alpha-q =$

$= (2\alpha+p)\varepsilon+\varepsilon^2$ και επομένως: $(2\alpha+p)\varepsilon+\varepsilon^2 = \varepsilon[2(\alpha+\theta\varepsilon)+p] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2}$. Για την συνάρτηση f ο θ είναι σταθερός και ίσος προς $\frac{1}{2}$. Αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι το σημείο επαφής της εφαπτομένης της παράλληλης προς την χορδή των σημείων A και B έχει τετμημένη ίση προς το ημιάθροισμα των τετμημένων των άκρων της χορδής, δηλαδή η από το σημείο επαφής παράλληλη προς τον άξονα των y διχοτομεί την AB.

Παράδειγμα 2. Να γίνει εφαρμογή στην συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x}$. Να μελετηθούν οι αριθμοί ξ,θ.

Απάντηση: Για την εφαρμογή του θεωρήματος στην συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ πρέπει και αρκεί τα άκρα του διαστήματος (α,β) να είναι ομόσημα. Η παράγωγος είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ \forall\ x\in(\alpha,\beta)$.
Επομένως υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε:

$$\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha} = (\beta-\alpha)\frac{-1}{\xi^2}$$

Από αυτήν παίρνουμε: $\xi^2 = \alpha\beta$.

Εάν $\alpha > 0$, $\beta > 0$, τότε $\xi = \sqrt{\alpha\beta}$ και αν $\alpha < 0$, $\beta < 0$, τότε $\xi = -\sqrt{\alpha\beta}$ (αφού ξ μεταξύ α και β). (Επομένως ο $|\xi|$ είναι μέσος ανάλογος των α, β).

Ο αριθμός θ θα δίνεται από τον τύπο: $\theta = \frac{\xi-\alpha}{\beta-\alpha}$. Εάν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε:

$$\theta = \frac{\sqrt{\alpha\beta}-\alpha}{\beta-\alpha} = \sqrt{\alpha}\,\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}$$ ανάλογα αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$.

5. Τονίζουμε, ότι τα παραπάνω δύο θεωρήματα δεν ισχύουν αντίστροφα αν το $\mathcal{D}(f)$ είναι ένωση διαστημάτων. Αυτό δείχνουν τα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε την συνάρτηση f ορισμένη όπως παρακάτω: $f(x) = \begin{cases} c \neq 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}_+^* \\ -c & \text{αν } x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

Ποιά η παράγωγος της; Τι παρατηρείτε;

Απάντηση: Προφανώς $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in \mathcal{D}(f)$. Παρατηρούμε όμως ότι αν και η παράγωγος αυτής $\forall\, x \in \mathcal{D}(f)$ είναι μηδέν δεν είναι μια σταθερή στο $\mathcal{D}(f)$.

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με $f_1(x) = x$ και $\mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}-\{0\}$ και:

$$f_2(x) = \begin{cases} x+c & \text{αν } x \in \mathbb{R}_+^* \\ x-c & \text{αν } x \in \mathbb{R}_-^* \quad (c \neq 0) \end{cases}$$

Ποιές οι παράγωγοι αυτών; Τι παρατηρείτε;

Απάντηση: Προφανώς $\mathcal{D}(f_2) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Η παράγωγος της f_1 είναι $f_1'(x) = 1$ $\forall\, x \in \mathcal{D}(f_1)$ και η παράγωγος της f_2 είναι $f_2'(x) = 1$ $\forall\, x \in \mathcal{D}(f_2)$. Ώστε $\forall\, x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ έχουν ίσες παραγώγους, παρόλα αυτά η διαφορά των δεν είναι μια σταθερά $\forall\, x \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$, αφού $f_1(x)-f_2(x) = -c$ αν $x \in \mathbb{R}_+^*$ και $f_1(x)-f_2(x) = c$ αν $x \in \mathbb{R}_-^*$.

6. Στο θεώρημα Μ.Τ αν ισχύει $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0$, τότε στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της $f(x) = 0$. Γιατί, όπως ξέρουμε, αφού $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0$ θα είναι, έστω $f(\xi_1) < 0 < f(\xi_2)$, αλλά τότε, όπως ξέρουμε, από τις συνεχείς συναρτήσεις, υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$ και προφανώς κατά το θεώρημα μοναδικό.

7. Επανερχόμενοι και πάλι στο θεώρημα 2 παρατηρούμε ότι, αν για τις ρίζες x_1, x_2 υποτεθεί $x_1 = x_2$, δηλαδή η μεταξύ των ξ_1 και ξ_2 περιεχόμενη ρίζα της $f(x) = 0$ να είναι πολλαπλή,

τότε, όπως θα δούμε αργότερα, θα έχουμε $f'(x_1) = 0$ και επομένως μεταξύ των διαδοχικών ριζών της $f'(x) = 0$ θα υπήρχε και η x_1 άτοπο.

Για την περίπτωση ακεραίου πολυωνύμου το ζήτημα είναι απλό.

Πράγματι, αν η πραγματική ρίζα ρ του πολυωνύμου $f(x)$ είναι πολλαπλότητας $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε η ρ είναι και ρίζα της παραγώγου πολλαπλότητας κ-1.

Απόδειξη: 'Εστω ότι: $f(x) \equiv (x-\rho)^{\kappa}\pi(x)$ με $\pi(\rho) \neq 0$. Θα έχουμε: $f'(x) \equiv \kappa(x-\rho)^{\kappa-1}\pi(x)+(x-\rho)^{\kappa}\pi'(x) \equiv$
$\equiv (x-\rho)^{\kappa-1}[\kappa\pi(x)+(x-\rho)\pi'(x)]$ και επειδή $\kappa\pi(\rho)+(\rho-\rho)\pi'(\rho) =$
$= \kappa\pi(\rho) \neq 0$, η ρ είναι ρίζα της παραγώγου πολλαπλότητας κ-1.

Η αντίστροφη πρόταση έχει ως εξής:

Εάν το πολυώνυμο $f(x)$ και η παράγωγος αυτού $f'(x)$ έχουν την ρίζα $\rho \in \mathbb{R}$ κοινή και είναι πολλαπλότητας κ-1 για την παράγωγο, τότε θα είναι πολλαπλότητας κ για το $f(x)$.

Για αν η ρ ήταν πολλαπλότητας $\mu \in \mathbb{N}$ για το $f(x)$, τότε για την παράγωγο θα ήταν πολλαπλότητας μ-1. Εύκολα έπεται, ότι $\mu = \kappa$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟ Θ. Fermat- Θ. Rolle- Θ.Μ.Τ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+x+1$ /ℝ

Δείξετε ότι στο σημείο $x_0 = -\frac{1}{2}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

Λύση: Για να έχει η f ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = -\frac{1}{2}$ πρέπει $\forall\, x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) \geq f(-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x^2+x+1 \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow 4x^2+4x+4 \geq 1-2+4 \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 0$ που ισχύει.

Επομένως η f έχει στη θέση $x_0 = -\frac{1}{2}$ ολικό ελάχιστο και είναι το $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x}$ και $x \in [0,2\pi]$
Να βρεθούν τα πιθανά ακρότατα της.

Λύση: Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f.

Είναι $f'(x) = \frac{(ημx-συνx)'e^x - e^x(ημx-συνx)}{e^{2x}} = \frac{2e^x συνx}{e^{2x}} = \frac{2συνx}{e^x}$

Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων θα είναι τα σημεία του διαστήματος (0,2π) στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow συνx = 0 \Leftrightarrow συνx = συν\frac{π}{2} \Rightarrow x = 2κπ \pm \frac{π}{2}$,

$κ \in Z$. Αλλά $x \in [0,2π] \Rightarrow 0 \leq 2κπ + \frac{π}{2} \leq 2π \Leftrightarrow -\frac{π}{2} \leq 2κπ \leq \frac{3π}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq κ \leq \frac{3}{4}$, $κ \in Z \Rightarrow κ = 0$ οπότε το μοναδικό σημείο του

(0,2π) είναι το $x = \frac{π}{2}$.

Επίσης $0 \leq 2κπ - \frac{π}{2} \leq 2π \Rightarrow \frac{π}{2} \leq 2κπ \leq \frac{5π}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq κ \leq \frac{5}{4}$, $κ \in Z$

$\Rightarrow κ = 1$ άρα υπάρχει και το σημείο $x = \frac{3π}{2}$.

Επομένως οι πιθανές θέσεις ακροτάτων στο διάστημα [0,2π] είναι τα σημεία $x = \frac{π}{2}$ και $x = \frac{3π}{2}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x + 1$. Να βρεθούν οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.

Λύση: Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f θα είναι στις ρίζες της πρώτης παραγώγου. Είναι $f'(x) = e^x - 1$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$. Άρα πιθανή θέση ακροτάτου είναι η $x = 0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$

Να βρεθούν οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, 1] \cup (1, +\infty)$

Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = \begin{cases} 4x, & x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$

και στην θέση $x = 1$ είναι $f'(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 4$ και $f'(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3-x-2}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

'Αρα η f δεν έχει παράγωγο στο σημείο $x = 1$.
Η πρώτη παράγωγος είναι μηδέν όταν $4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ που είναι δεχτή γιατί $x < 1$. 'Αρα μια πιθανή θέση ακρότατου είναι η $x = 0$ στην οποία υπάρχει η πρώτη παράγωγος.

Εξετάζουμε τώρα μήπως η f έχει ακρότατο στο σημείο $x = 1$ που δεν υπάρχει η πρώτη παράγωγος.

Παρατηρούμε ότι όταν $0 < x < 1$ είναι $f'(x) > 0$ και όταν $x > 1$ είναι $f'(x) < 0$. 'Αρα η f παρουσιάζει και στη θέση $x = 1$ ακρότατο γιατί η f' αλλάζει σημείο στην περιοχή του 1 και είναι το $f(1) = 2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-4x^2+3x$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Λύση: α) Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ σαν πολυωνυμική.
β) 'Εχει παράγωγο $\forall\, x \in (0,1)$ και είναι $f'(x) = 3x^2-8x+3$.
γ) Είναι $f(0) = f(1) = 0$.
'Αρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Πράγματι $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2-8\xi+3 = 0 \Leftrightarrow \xi_{1,2} = \dfrac{4\pm\sqrt{16-9}}{3} = \dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \xi = \dfrac{4-\sqrt{7}}{3} \in (0,1)$.

6. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θ. Rolle για τις συναρτήσεις:
i) $f(x) = e^{|x^2-1|}$ στο διάστημα $[-1,1]$
ii) $g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ στο διάστημα $[0,2]$
iii) $h(x) = x^3$ στο διάστημα $[-1,1]$.

Λύση: i) Η f γράφεται: $f(x) = \begin{cases} e^{x^2-1}, & x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1 \\ e^{-x^2+1}, & -1 < x < 1 \end{cases}$

Είναι δε συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2-1}, & x > 1 \text{ ή } x < -1 \\ -2xe^{-x^2+1}, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

Ακόμη είναι: $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{x^2-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2xe^{x^2-1}}{1} = 2$

και $f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-x^2+1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2xe^{-x^2+1}}{1} = -2$

Άρα $f'(1^+) \neq f'(1^-)$ επομένως δεν ισχύει το θ. Rolle στο $[-1,1]$.

ii) Η g είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ $\cup (1,2)$ με παράγωγο την $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$

Άρα είναι $f'(x) \neq 0 \;\forall\; x \in (0,1) \cup (1,2)$.
Επίσης είναι $f(0) = f(2) = 1$.
Επομένως δεν υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

iii) Η h είναι συνεχής στο $[-1,1]$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Αλλά $h(1) \neq h(-1)$. Όμως υπάρχει $\xi \in (-1,1)$: $h'(\xi) = 0$. Πράγματι είναι $h'(x) = 3x^2 \Rightarrow h'(\xi) = 3\xi \;\; = 0$ $\Leftrightarrow \xi = 0 \in (-1,1)$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x \in [-1,0] \\ \gamma x^2+6x+3, & x \in [0,1] \end{cases}$
Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να ικανοποιεί τις συνθήκες στο θ. Rolle στο $[-1,1]$.

Λύση: Για να ικανοποιεί η f τις συνθήκες του Rolle πρέπει:
i) $f(1) = f(-1)$.
ii) Να είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και αυτό θα συμβαίνει όταν $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$
iii) Η f να είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και αυτό θα συμβαίνει όταν $f'(0^+) = f'(0^-)$.
Από την (i) έχουμε: $\gamma+9 = \beta-\alpha+1 \quad (1)$
Από την (ii) έχουμε: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \beta \Leftrightarrow \beta = 3 \;(2)$
Από δε την (iii) έχουμε: $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\gamma x^2+6x+3-3}{x-0} =$

$= \lim_{x\to 0^+}(\gamma x+6) = 6 = f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+\alpha x+\beta-3}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+\alpha x}{x} = \alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = 6 \;(3)$
Από τις (1),(2),(3) έχουμε $\alpha = 6$, $\beta = 3$, $\gamma = -11$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-x^2-3x+2$ να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0,2]$ και αν ναι να βρείτε $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $[0,2] \subset \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε:
$f'(\xi) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$. Είναι όμως $f'(x) = 3x^2-2x-3 \ \forall \ x \in (0,2)$

οπότε και με $x = \xi$ είναι $3\xi^2-2\xi-3 = \frac{8-4-6+2-2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\xi^2-2\xi-3 = -2 \Leftrightarrow 3\xi^2-2\xi-1 = 0 \Leftrightarrow \xi_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+3}}{3} = \frac{1\pm 2}{3} =$

$\Rightarrow \xi_1 = 1, \ \xi_2 = -\frac{1}{3}$.

Δεχτή ρίζα είναι η $\xi_1 = 1 \in (0,2)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 4x-1, & x \in [1,2] \\ x^2+3, & x \in (2,3] \end{cases}$
Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1,3]$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ γιατί είναι συνεχής στη θέση $x = 2$.
Πράγματι: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 7 = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$
Είναι παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ γιατί
$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{4x-1-7}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4(x-2)}{x-2} = 4$
και $f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3-7}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4$
Δηλαδή $f'(2^+) = f'(2^-) = 4$.
Επομένως στο διάστημα $(1,3)$ ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε:
$f'(\xi) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{9}{2}$ και επειδή $f'(\xi) = 2\xi$ είναι $2\xi = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \xi = \frac{9}{4} \in (1,3)$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη σ'αυτό με $f(0) = c$ και ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f'(x) \le \lambda$ $\forall\, x \in (0,+\infty)$. Δείξετε ότι: $f(x) \le c+\lambda x$.

Λύση: Η f στο διάστημα $[0,+\infty)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ επομένως θα τις ικανοποιεί και στο διάστημα $[0,x] \subset \subset [0,+\infty)$. Άρα θα υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad (1)$$

Επειδή δε $f'(x) \le \lambda$ $\forall\, x \in (0,+\infty)$ θα ισχύει και για $x = \xi$ οπότε $f'(\xi) \le \lambda$ (2).
Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{f(x)-c}{x} \le \lambda \Leftrightarrow f(x) \le \lambda x+c$ (επειδή το $x > 0$).

11. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$. Δείξετε ότι: $f(x) = f(\alpha)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$.

Λύση: Η f ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,\beta]$ επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1) και αν στην (1) θέσουμε $\beta = x$ θα έχουμε: $f'(\xi)(x-\alpha) = f(x)-f(\alpha)$ με $\alpha < \xi < x$ και επειδή $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (\alpha,x)$ θα είναι και $f'(\xi) = 0$ οπότε:
$0 = f(x)-f(\alpha) \Leftrightarrow f(x) = f(\alpha)$.

12. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ δείξετε ότι: $e^x \ge 1+x$.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι $e^x-x-1 \ge 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$
Όταν $x = 0$ είναι φανερή. Επομένως θα αποδείξουμε την ανισότητα όταν $x \neq 0$. Θέτουμε $f(x) = e^x-x-1$ και η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Άρα στο διάστημα $[x,0]$ ή $[0,x]$ ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ και επομένως υπάρχει $\xi \in (x,0)$ ή $\xi(0,x)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(0)-f(x)}{0-x} \quad \text{ή} \quad f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Αλλά είναι $f'(x) = e^x-1$ και για $x = \xi \Rightarrow f'(\xi) = e^x-1$.
Αν τώρα είναι $\xi \in (x,0)$ τότε $e^x-1 \ge 0$ οπότε

$$\frac{f(0)-f(x)}{0-x} < 0 \Leftrightarrow f(0)-f(x) < 0 \Leftrightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow$$

$0 < e^x - x - 1 \Leftrightarrow e^x > x+1$.

Αν $\xi \in (0,x)$ τότε $e^{\xi} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} > 0$

$\Leftrightarrow f(x)-f(0) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > x+1$

Άρα $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$.

13. Δείξετε ότι $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $\ln x \geq -\frac{1}{x}+1$

Λύση: Αρκεί να δείξουμε την ανισότητα $\ln x - \frac{1}{x} + 1 \geq 0$. Θέτουμε: $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα και σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Αν επομένως θεωρήσουμε τα διαστήματα $[x,1) \subset (0,1)$ και $(1,x] \subset (1,+\infty)$ τότε θα ισχύει σ'αυτό το Θ.Μ.Τ και επομένως θα υπάρχει $\xi \in (x,1)$ αντίστοιχα $\xi \in (1,x)$ έτσι ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ αντίστοιχα $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Αλλά με $x < \xi < 1$ είναι $1-x > 0$ και $f'(\xi) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} = \frac{\xi-1}{\xi^2} < 0$

Άρα $\frac{f(1)-f(x)}{1-x} < 0 \Leftrightarrow f(1)-f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow$

$\ln x + \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{x} + 1$

Με $1 < \xi_1 < x$ είναι $x-1 > 0$ και $f'(\xi_1) = \frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_1^2} = \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1^2} > 0$

Άρα $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} > 0 \Leftrightarrow f(x)-f(1) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x - 1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{x} + 1$.

Για $x = 1$ είναι προφανής και ισχύει με το ίσο.

14. Να δείξετε ότι $\forall\, \alpha,\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει:

$(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta \leq \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha \leq (\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1)

Λύση: Αν $\alpha = \beta$ είναι προφανής.

Έστω $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ τότε $\beta - \alpha > 0$ και η (1) γίνεται:

$\sigma\upsilon\nu\beta < \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha} < \sigma\upsilon\nu\alpha$ (2)

Από την (2) το μεσαίο σκέλος βοηθά να θεωρήσουμε τη συνάρ-

τηση $f(x) = ημx$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(α,β)$ οπότε γι'αυτήν ισχύει το Θ.Μ.Τ.

'Αρα $\exists\ ξ \in (α,β)$: $f'(ξ) = \dfrac{f(β)-f(α)}{β-α} = \dfrac{ημβ-ημα}{β-α}$

Είναι αρκετό επομένως να δείξουμε ότι:

$συνβ < f'(ξ) < συνα$ (3). Επειδή δε $f'(ξ) = συνξ$.

Αρκεί να δείξουμε ότι: $συνβ < συνξ < συνα$ (4)

Επειδή όμως $α < ξ < β$ και η συνάρτηση συν είναι φθίνουσα στο διάστημα $(α,β)$ έχουμε: $συνα > συνξ > συνβ$ (5) που είναι η (4). 'Αρα η (1) αληθεύει $\forall\ α,β \in (0, \frac{π}{2})$

15. Δείξετε ότι $\forall\ ν \in N^*$ και $α \geq β > 0$ ισχύει

$$να^{ν-1}(α-β) \geq α^{ν}-β^{ν} \geq νβ^{ν-1}(α-β) \qquad (1)$$

Λύση: Με $α = β$ ισχύει με το ίσο.

'Εστω $α > β > 0$ τότε $α-β > 0$ και η (1) γράφεται:

$$να^{ν-1} > \frac{α^{ν}-β^{ν}}{α-β} > νβ^{ν-1} \qquad (2)$$

θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^{ν}$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(β,α)$, άρα σ'αυτό ισχύει το Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει $ξ \in (β,α)$ ώστε $f'(ξ) = νξ^{ν-1} =$

$= \dfrac{f(α)-f(β)}{α-β} = \dfrac{α^{ν}-β^{ν}}{α-β}$ και τότε για την απόδειξη της (2) αρκεί να δείξουμε ότι $να^{ν-1} > νξ^{ν-1} > νβ^{ν-1}$ (3) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow α^{ν-1} > ξ^{ν-1} > β^{ν-1} \Leftrightarrow α > ξ > β$ που ισχύει.

ΜΕΘΟΔΟΣ ROLLE

1. Σε προβλήματα στα οποία ζητείται το πλήθος των πραγματικών ριζών κάποιας εξίσωσης κάνουμε χρήση του θ. Rolle προσέχοντας μήπως η εξίσωση είναι η παράγωγος κάποιας συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης σε κάποιο διάστημα Δ, οπότε με βάση τις γνωστές προτάσεις θα υπάρχει μια τουλάχιστο ρίζα αυτής στο διάστημα Δ. Ή μήπως η εξίσωση είναι μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση και τότε μεταξύ των διαδοχικών ριζών της παραγώγου της υπάρχει το πολύ μια ρίζα της εξίσωσης.

2. Επίσης αν δεν ισχύει η συνθήκη $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε θέτοντας $f(\beta)-f(\alpha) = c$ (c = σταθερά) και θεωρώντας τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x)-\lambda x$ ή $\varphi(x) = f(x)-\lambda(x-\alpha)$ προσδιορίζουμε το λ έτσι ώστε για την φ να ισχύουν οι συνθήκες του θ. Rolle, οπότε αποδείχνουμε σχέσεις που συνδέουν την παράγωγο της f σε κάποιο σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$ και α,β,ξ.

3. Από την μορφή που έχουν τα συμπεράσματα που θέλουμε να αποδείξουμε υποψιαζόμαστε τη μορφή της κατάλληλης συνάρτησης που θα θεωρήσουμε θέτοντας στη θέση του αριθμού $\xi \in (\alpha,\beta)$ το x. Για την συνάρτηση που προκύπτει δείχνουμε ότι πληρούνται οι συνθήκες του θ. Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και με κατάλληλους μετασχηματισμούς φτάνουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Τα θέματα που ακολουθούν θα κάνουν ποιό κατανοητή τη μέθοδο.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (4x-1)(x+4)(x-5)(x-7)$. Να βρεθεί πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $f'(x) = 0$.

Λύση: Οι ρίζες της $f(x) = 0$ είναι $\frac{1}{4}$, $-4,5,7$ και επειδή η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στα

διαστήμαρα $[-4, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, 5]$, $[5,7]$. Επίσης είναι και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στα ανοιχτά διαστήματα $(-4, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, 5)$ $(5,7)$.

Επειδή δε είναι και $f(-4) = f(\frac{1}{4}) = f(5) = f(7) = 0$ υπάρχει βάσει του Θ. Rolle μια τουχάχιστο πραγματική ρίζα της παραγώγου της f σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα.

Επειδή δε η $f'(x) = 0$ είναι βαθμού τρίτου υπάρχουν μόνο τρείς ρίζες της $f'(x) = 0$.

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μόνο τρείς πραγματικές ρίζες.

Θέμα 2. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^9+5x^5+4x+6$.

Δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα και οκτώ μιγαδικές.

Λύση: Επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα Θ. Bolzano.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είχε δύο πραγματικές ρίζες έστω τις ρ_1, ρ_2 τότε επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική θα είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) που είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Και επειδή $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ θα υπήρχε τότε μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα ρ στο (ρ_1, ρ_2) τέτοια ώστε $f'(\rho) = 0$.

Αλλά είναι $f'(x) = 9x^8+25x^4+4 \neq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Επομένως είναι $f'(\rho) \neq 0$.

Άρα η $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Επειδή όμως έχει τουλάχιστο μια έχει μια μόνο πραγματική και τις υπόλοιπες μιγαδικές.

Θέμα 3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3-3x-1$.

Δείξετε χωρίς να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ ότι αυτή έχει μια μόνο ρίζα $\rho \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Λύση: Επειδή η f είναι περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα το $\mathbb{R}$ και επειδή $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})f(\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$ η ρίζα

αυτή έστω $\rho\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. Δεν μπορεί η f να έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 στο $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ για αν συνέβαινε αυτό τότε στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο κλειστό και επειδή $f(\rho_1)=$ $=f(\rho_2)=0$ θα υπάρχει θεώρημα Rolle μια τουλάχιστο ρίζα της $f'(x)=0$ τέτοια ώστε $\rho\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Αλλά είναι $f'(x)=6x^2-3$ και είναι $f'(x)=0 \iff 6x^2-3=0$ $\iff x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ θα πρέπει να βρίσκονται στο ανοιχτό διάστημα $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ που είναι άτοπο.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα στο $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Θέμα 4. Δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x)=x^3-3x+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση: Επειδή το f(x) είναι περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι είχε δύο πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1\neq\rho_2$ στο $(0,1)$ τότε βάσει του θ. Rolle η παράγωγος θα είχε μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα το (ρ_1,ρ_2). Είναι όμως $f'(x)=3x^2-3$ και γίνεται μηδέν για $x=\pm1$.

Επομένως θα έπρεπε τότε μια τουλάχιστο από τις ρίζες της παραγώγου να βρίσκεται στο $(0,1)$ που είναι άτοπο. Άρα δεν μπορεί η f να έχει δύο ρίζες στο $(0,1)$.

Θέμα 5. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=$ $=(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu}+\lambda$ $\mu,\nu\in\mathbb{N}$
Δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $\frac{\beta-\xi}{\xi-\alpha}=\frac{\mu}{\nu}$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ σαν πολυωνυμική είναι και παραγωγίσιμη στο (α,β), επειδή δε $f(\alpha)=f(\beta)=\lambda$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=0$

Είναι όμως:

$f'(x) = \mu(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu}+\nu(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu-1} =$
$= (x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu-1}[\mu(x-\alpha)+\nu(x-\beta)]$. Άρα
$f'(\xi) = (\xi-\alpha)^{\mu-1}(\xi-\beta)^{\nu-1}[\mu(\xi-\alpha)+\nu(\xi-\beta)] = 0 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \mu(\xi-\alpha)+\nu(\xi-\beta) = 0 \leftrightarrow \mu(\xi-\alpha) = \nu(\beta-\xi) \leftrightarrow \frac{\mu}{\nu} = \frac{\beta-\xi}{\xi-\alpha}.$$

Θέμα 6. Δίνεται η εξίσωση x^2-xημx-συνx = 0. Δείξετε ότι έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες.

Λύση: Θέτουμε $f(x) = x^2$-xημx-συνx.
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επομένως υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$: $f'(\xi) = 0$.
Επειδή όμως είναι $f'(x)$ = 2x-ημx-xσυνx+ημx = x(2-συνx) η f' έχει μοναδική πραγματική ρίζα την x = 0 βάσει γνωστής πρότασης του Rolle η f(x) = 0 έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες, και επειδή $f(0)f(\pi) = -1(\pi^2+1) < 0$ και $f(-\pi)f(0) = -(\pi^2+1) < 0$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,\pi)$ και $(-\pi,0)$ υπάρχει θ. Bolzano μια τουλάχιστο ρίζα της f(x) = 0.
Άρα η f(x) = 0 έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες.

Θέμα 7. Δίνεται η εξίσωση $c_1^2(\alpha_1-x)+c_2^2(\alpha_2-x)+\ldots+c_\nu^2(\alpha_\nu-x) = x+x^3+x^5+\ldots+x^{2\nu+1}$, $c_1,c_2,\ldots,c_\nu,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu \in \mathbb{R}$ (1). Δείξετε ότι η εξίσωση έχει μια το πολύ πραγματική ρίζα.

Λύση: Επειδή η (1) είναι περιττού βαθμού έχει θεώρημα Bolzano μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα.
Αρκεί να δείξουμε ότι δεν μπορεί να έχει δύο. Έστω ότι είχε δύο τις $\rho_1,\rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 \neq \rho_2$. Τότε αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = c_1^2(\alpha_1-x)+c_2^2(\alpha_2-x)+\ldots+c_\nu^2(\alpha_\nu-x)-(x+x^3+\ldots+x^{2\nu+1})$ τότε σαν πολυωνυμική θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[\rho_1,\rho_2] \in \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο (ρ_1,ρ_2) και επειδή είναι και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ ισχύει γιαυτήν το θ.Rolle.
Άρα υπάρχει $\xi \in (\rho_1,\rho_2)$: $f'(\xi) = 0$.
Αλλά είναι: $f'(x) = -c_1-c_2-\ldots-c_\nu-1-3x^2-5x^4-\ldots-(2\nu+1)x^{2\nu} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Επομένως η $f'(x) = 0$ δεν έχει καμμία πραγματική ρίζα.
Άρα δεν υπάρχει ρίζα $\xi \in (\rho_1,\rho_2)$: $f'(\xi) = 0$.

Συνεπώς η $f(x) = 0$ δεν είναι δυνατό να έχει δύο πραγματικές ρίζες, έχει όμως τουλάχιστο μια. Άρα έχει μια μόνο.

Θέμα 8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha,\gamma] \to \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$ και υπάρχουν οι $f'(x)$, $f''(x) \forall x \in (\alpha,\gamma)$ Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\gamma)$: $f''(\xi) = 0$.

Λύση: Για την f ισχύει το θ. Rolle στο $[\alpha,\beta] \subseteq [\alpha,\gamma]$ άρα υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$: $f'(\xi_1) = 0$ (1).

Όμοια υπάρχει $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$: $f'(\xi_2) = 0$ (2).

Αλλά και στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) επειδή δε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ ισχύει το θ. Rolle, άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq [\alpha,\gamma]$ έτσι ώστε $f''(\xi) = 0$.

Θέμα 9. Οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ επαληθεύουν τη σχέση $\frac{\alpha_0}{1} + \frac{\alpha_1}{2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\nu+1} = 0$ (1).

Δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\nu x^\nu$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα.

Λύση: Θεωρούμε τις παράγουσες συναρτήσεις της f που είναι οι

$$F(x) = \frac{\alpha_0 x}{1} + \alpha_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + \alpha_\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σαν πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$ και επειδή $F(0) = c$ και $F(1) = c$ λόγω της (1) θα ισχύει γιαυτήν το θ. Rolle στο διάστημα $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Άρα θα υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $F'(\xi) = 0$.

Αλλά είναι $F'(x) = f(x)$ (2) οπότε με $x = \xi$ η (2) γίνεται $F'(\xi) = f(\xi) = 0$.

Συνεπώς το πολυώνυμο $f(x)$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα.

Θέμα 10. Έστω οι συναρτήσεις $f,g,h: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β).

Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f'(\xi) \\ g(\alpha) & g(\beta) & g'(\xi) \\ h(\alpha) & h(\beta) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f(x) \\ g(\alpha) & g(\beta) & g(x) \\ h(\alpha) & h(\beta) & h(x) \end{vmatrix}$$

που είναι συνεχής το $[\alpha,\beta]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$.
'Αρα ισχύει το Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi) = 0$

Αλλά είναι $\varphi'(\xi) = \begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f'(\xi) \\ g(\alpha) & g(\beta) & g'(\xi) \\ h(\alpha) & h(\beta) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$

Θέμα 11. 'Εστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) για τις οποίες ισχύουν:

i) $f'(x)g(x)-g'(x)f(x) \neq 0 \ \forall\, x\in(\alpha,\beta)$

ii) $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

iii) $g(\alpha)g(\beta) \neq 0$

Δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Λύση: Από την (i) οδηγούμαστε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ αν $g(x) \neq 0$ $\forall\, x\in(\alpha,\beta)$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$.
'Αρα ισχύει γιαυτήν το Θ. Rolle επομένως υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $\varphi'(\xi) = 0$

Αλλά είναι $\varphi'(\xi) = \dfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \neq 0$

Επομένως δεν μπορεί να είναι $g(x) \neq 0$ για $x\in(\alpha,\beta)$.
'Αρα υπάρχει κάποιο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $g(\xi) = 0$.

Θέμα 12. 'Εστω η συνάρτηση f με $f(t) = t^\nu+1-(t+1)^\nu$, ν = άρτιος φυσικός.

Δείξετε ότι $f(t) = 0$ μόνο για $t = 0$.

Λύση: Προφανώς με $t = 0$ ισχύει $f(0) = 0$.
'Εστω τώρα ότι υπήρχε και ένα $t_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε $f(t_0) = 0$

τότε στο διάστημα $[0,t_0]$ η f είναι συνεχής, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,t_0)$ και $f(0) = f(t_0) = 0$.
Άρα από το θ. Rolle έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,t_0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
Αλλά $f'(t) = \nu t^{\nu-1} - \nu(t+1)^{\nu-1}$ και με $t = \xi$ έχουμε:
$f'(\xi) = 0 = \nu\xi^{\nu-1} - \nu(\xi+1)^{\nu-1} = 0 \leftrightarrow \xi^{\nu-1} - (\xi+1)^{\nu-1} = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left(\frac{\xi+1}{\xi}\right)^{\nu-1} = 1 \leftrightarrow \frac{\xi+1}{\xi} = 1$ (γιατί $\nu-1$ = περιττός)

$\leftrightarrow 1 = 0$ (άτοπο).
Επομένως μόνο για $t = 0$ ισχύει $f(0) = 0$.
Δηλαδή υπάρχει μοναδικός αριθμός $t \doteq 0$ τέτοιος ώστε $t^\nu + 1 = (t+1)^\nu$ με ν άρτιο.

Σημείωση: Αν $t = \frac{\alpha}{\beta}$, $\beta \neq 0$ τότε η σχέση $\alpha^\nu + \beta^\nu = (\alpha+\beta)^\nu$ ισχύει μόνο για $\alpha = 0$.

Θέμα 13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,3] \to \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ για την οποία ισχύει $f(3) - f(1) = 16$. Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - 2x^2$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$ παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ και $\varphi(3) = \varphi(1)$
$\leftrightarrow \varphi(3) - \varphi(1) = 0 \leftrightarrow f(3) - 18 - f(1) + 2 = 0 \leftrightarrow 16 - 18 + 2 = 0$.
Άρα γιαυτήν ισχύει το θ. Rolle. Επομένως υπάρχει
$\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0$.
Αλλά είναι $\varphi'(x) = f'(x) - 4x$ και με $x = \xi$ είναι
$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - 4\xi = 0 \leftrightarrow f'(\xi) = 4\xi$.

Θέμα 14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ που είναι
i) συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.
ii) παραγωγίσιμες στο (α,β).
Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε
$[f(\beta) - f(\alpha)]g'(\xi) = [g(\beta) - g(\alpha)]f'(\xi)$ (1).

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση φ με $\varphi(x) = [f(\beta) - f(\alpha)]g(x) - [g(\beta) - g(\alpha)]f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) με $\varphi'(x) = [f(\beta) - f(\alpha)]\,g'(x) - [g(\beta) - g(\alpha)]$
$f'(x)$ (2)

και $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = f(\beta)g(\alpha)-g(\beta)f(\alpha)$.
Επομένως ισχύει το Θ. Rolle γιαυτήν. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Συνεπώς η (2) για $x = \xi$ γίνεται:
$\varphi'(\xi)=[f(\beta)-f(\alpha)]g'(\xi)-[g(\beta)-g(\alpha)]f'(\xi) = 0$. Δηλαδή η (1)

Θέμα 15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x^2-1)10^{\lambda x}$.
Δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια μόνο λύση στο $(-1,1)$ που είναι ομόσημη του $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Λύση: Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(-1,1)\subset \mathbb{R}$, επειδή δε είναι και $f(1) = f(-1) = 0$ ισχύει το Θ. Rolle, δηλαδή υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
Αλλά είναι $f'(x) = 2x10^{\lambda x}+(x^2-1)10^{\lambda x}\lambda \log 10$ και με $x = \xi$ έχουμε $f'(\xi) = 0 = 2\xi 10^{\lambda \xi}+(\xi^2-1)10^{\lambda \xi}\lambda \log 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\xi+\lambda(\xi^2-1)\log 10 = 0 \Leftrightarrow 2\xi+\lambda(\xi^2-1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda\xi^2+2\xi-\lambda = 0$ (1).
Από την (1) αν ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της είναι $\rho_1+\rho_2 = -\frac{2}{\lambda}$ και
$\rho_1\rho_2 = -1 < 0$ απ'όπου φαίνεται ότι οι ρίζες είναι ετερόσημες επειδή δε $-1 < \xi < 1 \Leftrightarrow |\xi| < 1 \Leftrightarrow \xi^2 < 1 \Leftrightarrow 1-\xi^2 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{2\xi}{\lambda} = -(\xi^2-1) > 0 \Leftrightarrow \xi\lambda > 0$, άρα η ρίζα $\xi \in (-1,1)$ είναι ομόσημη του λ.
Από δε την σχέση $\rho_1\rho_2 = -1 \Rightarrow \rho_1 = -\frac{1}{\rho_2} \Rightarrow |\rho_1| = \frac{1}{|\rho_2|} > 1$
αν $-1 < \rho_2 < 1 \Leftrightarrow |\rho_2| < 1$.
Επομένως μόνο η μια ρίζα της $f'(x) = 0$ βρίσκεται μέσα στο διάστημα $(-1,1)$ και συνεπώς η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(-1,1)$.

Θέμα 16. Έστω η συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ συνάρτηση f με $f(0) = 0$ και $f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in (0,1)$.
Δείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (0,1)$ έτσι ώστε
$2f'(\rho)f(\rho)-f^2(\rho)f'(1-\rho) = 0$ (1).

Λύση: Η σχέση (1) μας διευκολύνει να θεωρήσουμε την συνάρτηση $\varphi(x) = f^2(x)f(1-x)$ για την οποία ισχύει:
$\varphi'(x) = 2f(x)f'(x)f(1-x)-f^2(x)f'(1-x)$.
Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

και $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.
'Αρα γιαυτήν ισχύει το θ. Rolle επομένως υπάρχει $\rho \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\rho) = 0 = 2f(\rho)f'(\rho)f(1-\rho)-f^2(\rho)f'(1-\rho) = 0$ που είναι η (1).
Η (1) μπορεί να γραφεί $2f'(\rho)-f(\rho)f'(1-\rho) = 0$ γιατί είναι $f(\rho) \neq 0 \; \forall \; \rho \in (0,1)$.

Θέμα 17. Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
Δείξετε ότι $\exists \; \xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)-\kappa f'(\xi) = 0$ $\forall \; \kappa \in \mathbb{R}^*$.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^{-\frac{x}{k}}f(x)$ που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.
'Αρα από το θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$
Αλλά είναι $g'(x) = (e^{-\frac{x}{k}})'f(x)+e^{-\frac{x}{k}}f'(x) =$
$= -\frac{1}{\kappa}e^{-\frac{x}{k}}f(x)+e^{-\frac{x}{k}}f'(x)$.
Και με $x = \xi$ έχουμε: $g'(\xi) = 0 = -\frac{1}{\kappa}e^{-\frac{\xi}{\kappa}}f(\xi)+e^{-\frac{\xi}{\kappa}}f'(\xi) = 0$

$\longleftrightarrow -\frac{1}{\kappa}f(\xi)+f'(\xi) = 0 \longleftrightarrow f(\xi)-\kappa f'(\xi) = 0$ δηλαδή το ζητούμενο.

Θέμα 18. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β). Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = e^{f(x)}(x-\alpha)(x-\beta)$. Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) = \frac{\alpha+\beta-2\xi}{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}.$$

Λύση: Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$.
'Αρα ισχύει το θ. Rolle γιαυτήν.
Υπάρχει επομένως $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi) = 0$.
Αλλά είναι: $\varphi'(\xi) = e^{f(\xi)}f'(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)+e^{f(\xi)}(2\xi-\alpha-\beta) = 0$
$\longleftrightarrow f'(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)+2\xi-\alpha-\beta = 0 \longleftrightarrow f'(\xi) = \frac{\alpha+\beta-2\xi}{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}$

Θέμα 19. Θεωρούμε την συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη

στο (α,β) συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ και η χορδή $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ τέμνει το διάγραμμα της σε ένα σημείο Γ διαφορετικό των Α και Β. Δείξετε ότι:

i) Υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\gamma) = 0$

ii) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$

Λύση: i) Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = f(x)-g(x)$ όπου $g(x) = f(\alpha)+\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$ (εξίσωση της ΑΒ).

Προφανώς η συνάρτηση g τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία $(\alpha,0)$, $(\beta,0)$, $(\gamma,0)$ γιατί το γράφημά της προκύπτει από το διάγραμμα της f αφαιρώντας τις τεταγμένες των σημείων Α και Β. Για την συνάρτηση φ που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = \varphi(\gamma) = 0$ ισχύει το θεώρημα Rolle σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\alpha,\gamma]$, $[\gamma,\beta]$.
Επομένως υπάρχουν αριθμοί $\rho_1\in(\alpha,\gamma)$ και $\rho_2\in(\gamma,\beta)$ τέτοιοι ώστε $\varphi'(\rho_1) = 0$ και $\varphi'(\rho_2) = 0$ (1).
Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\varphi'(x) = f'(x)-g'(x)$ που είναι συνεχής στο ρ_1,ρ_2 παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) και $\varphi'(\rho_1) = \varphi'(\rho_2) = 0$. Επομένως από το θ. Rolle έχουμε ότι υπάρχει $\gamma\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $\varphi''(\gamma) = 0 = f''(\gamma)-g''(\gamma) = 0$ και επειδή $\forall\, x\in(\alpha,\beta)$ είναι $g''(x) = 0$.
Έχουμε $f''(\gamma) = 0$, δηλαδή η (i).

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ που είναι συνεχής στο $[\gamma,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (γ,β) και $h(\beta) = h(\gamma) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$ γιατί από την (i) είναι $f(\gamma) = g(\gamma)$.
Επομένως από το θ. Rolle έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\gamma,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 = \dfrac{f'(\xi)(\xi-\alpha)-(f(\xi)-f(\alpha))}{(\xi-\alpha)} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow f'(\xi)(\xi-\alpha)-f(\xi)+f(\alpha) = 0 \leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$$

Θέμα 20. Δίνεται η ορισμένη και συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).
Δείξετε i) για τη συνάρτηση F με $F(x) = \dfrac{f(x)}{x-c}$, $c\in[\alpha,\beta]$

υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$.

ii) Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f περνά από το σημείο (c,0).

Λύση: i) Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $F(\alpha) = F(\beta) = 0$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ θ. Rolle τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$.

Είναι δε $F'(x) = \dfrac{f'(x)(x-c)-f(x)}{(x-c)^2}$ και με $x = \xi$ έχουμε

$$F'(\xi) = 0 = \frac{f'(\xi)(\xi-c)-f(\xi)}{(\xi-c)^2} \rightarrow f'(\xi)(\xi-c)-f(\xi) = 0 \quad (1)$$

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο διάγραμμα της f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ έχει εξίσωση: $y-f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ (2).

Για να περνά η (2) από το σημείο (c,0) πρέπει το σημείο (c,0) να επαληθεύει την (2).

Δηλαδή πρέπει: $0-f(\xi) = f'(\xi)(c-\xi) \leftrightarrow f'(\xi)(c-\xi)+f(\xi) = 0$ που είναι αληθινό λόγω της (1).

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^\nu+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Δείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο ρίζες πραγματικές αν $\nu = 2\rho$, $\rho \in \mathbb{N}$.

ii) Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από τρείς ρίζες όταν $\nu = 2\rho+1$, $\rho \in \mathbb{N}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^\nu+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ $\nu \in \mathbb{N}$: $\nu \geq 3$.

Δείξετε ότι: i) Αν $\nu = 2\rho+1$, $\rho \in \mathbb{N}^*$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ή τρείς πραγματικές ρίζες.

ii) Αν $\nu = 2\rho$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ή τέσσερεις ή καμμιά πραγματική λύση.

3. Αν η εξίσωση $c_\nu x^\nu+c_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+c_1x+c_0 = 0$ με πραγματικούς συντελεστές έχει μια θετική ρίζα ρ τότε δείξετε ό-

τι η εξίσωση $\nu c_\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)c_{\nu-1}x^{\nu-2}+\ldots+c_1 = 0$ έχει μια θετική ρίζα μικρότερη του ρ.

4. Αν η πολυωνυμική εξίσωση $f(x) = 0$ έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές τότε και οι εξισώσεις

i) $f(x)-\alpha f'(x) = 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

ii) $f(x)-(\alpha+\beta)f'(x)+\alpha\beta f''(x) = 0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

έχουν όλες τις ρίζες τους πραγματικές.

5. Δείξετε ότι η εξίσωση $e^x-f(x) = 0$ έχει το πολύ $\nu+1$ πραγματικές ρίζες όταν $f(x)$ πολυώνυμο βαθμού ν.

6. Αν $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma = 0$ δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(0,1)$.

7. Όμοια αν $\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{3}+\frac{\delta}{4} = 0$ δείξετε ότι η εξίσωση $\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha = 0$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα.

8. Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει περισσότερες από ν ρίζες πραγματικές τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από $\nu+1$ πραγματικές ρίζες.

9. Δείξετε ότι η εξίσωση $e^x-xe^x-1 = 0$ δεν έχει πραγματική λύση εκτός από την $x = 0$.

10. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \ln(\eta\mu x)$ και $\mathcal{D}(f) = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$. Να βρεθεί αν υπάρχει $\xi\in(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

11. Αν η συνάρτηση f είναι

i) συνεχής στο $[0,1]$

ii) παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

iii) $f(0) = 0$ και $f(x) \neq 0$ $\forall x\in(0,1)$

Δείξετε ότι $\exists\ \xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $\frac{\nu f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

12. Να εξετάσετε αν ισχύει το θ. Rolle για τις συναρτήσεις στα αντίστοιχα διαστήματα

1. f με $f(x) = |x|-1$ στο διάστημα $[-1,1]$.
2. h με $h(x) = 1+\sqrt[5]{(x+2)^4}$ στο διάστημα $[-3,-1]$.
3. g με $g(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ στο διάστημα $[0,4]$.
4. φ με $\varphi(x) = 1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ στο διάστημα $[0,2]$.

13. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

i) $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

ii) $\exists\ \gamma \in (\alpha,\beta)$ και ισχύει $h(x) = f(\gamma)\,\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

$\forall\ x \in [\alpha,\beta]$.

Δείξετε ότι για τις συναρτήσεις $f(x)-h(x)$ και $f'(x)-$ $-h'(x)$ ισχύει το θ. Rolle και ισχύει $f(\gamma) = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ $\frac{f''(\xi)}{2}$ με $\xi \in (\alpha,\beta)$.

14. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (α,β) και $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

15. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f: [1,3] \to \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ τέτοια ώστε $f(3)-f(1) = 8$.
Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.

16. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Αν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x) \neq 0\ \forall\ x \in (\alpha,\beta)$
Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha-\xi} + \frac{1}{\beta-\xi}$$

17. Αν η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f'(\alpha) = f'(\beta)$ δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε να ισχύει: $f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$

18. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

19. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (\alpha x+\beta)^{\kappa}(\gamma x+\delta)^{\mu}$, $\kappa,\mu > 1$ και $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.

Δείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{\kappa\alpha\delta+\nu\beta\gamma}{\alpha\gamma(\kappa+\nu)} = \theta$ βρίσκεται στο διάστημα $\left(\dfrac{\delta}{\gamma}, \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

ΜΕΘΟΔΟΣ Lagrange

Σε προβλήματα ανισοτικά είναι δυνατή η εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής εφ'όσον μπορούμε να επιλέξουμε την κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση η οποία πρέπει να είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και να είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (α,β).
Και αν η ανισοτική σχέση είναι της μορφής $\varphi(x) \geq g(x)$ τότε σαν βοηθητική συνάρτηση θεωρούμε την διαφορά $f(x) = \varphi(x)-g(x)$ και εξετάζουμε αν η f πληροί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ.
Αν στην ανισοτική σχέση υπάρχουν δύο παράμετροι τότε ελέγχουμε μήπως είναι δυνατό να δημιουργήσουμε καμμιά παράσταση της μορφής $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ οπότε υποψιαζόμαστε ποιός θα είναι ο τύπος της βοηθητικής συνάρτησης γιατί τα $f(\alpha)$ $f(\beta)$ είναι οι τιμές της $y = f(x)$ στις αντίστοιχες θέσεις α,β του κλειστού διαστήματος $[\alpha,\beta]$ στο οποίο πρέπει η f να πληροί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ.
Τα θέματα που ακολουθούν θα κάνουν ποιό κατανοητή τη μέθοδο.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Αν $\nu \in (0,1)$ δείξετε ότι $(1+x)^{\nu} < 1+\nu x$, $-1 \leq x \neq 0$.

Λύση: θεωρούμε σαν βοηθητική συνάρτηση την διαφορά $f(x) = (1+x)^{\nu}-1-\nu x$ και αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) < 0$.
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και είναι $f'(x) = \nu(1+x)^{\nu-1}-\nu = \nu[(1+x)^{\nu-1}-1]$.
Αν θεωρήσουμε το διάστημα $[x,0]\in\mathbb{R}$ τότε από το θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(x,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\nu[(1+\xi)^{\nu-1}-1] =$
$= \frac{f(0)-f(x)}{0-x}$ (1)
Αλλά με $-1 < x < \xi < 0 \rightarrow 0 < x+1 < \xi+1 < 1 \rightarrow (\xi+1)^{\nu-1} > 1$ γιατί $\nu-1 < 0$. Άρα $f'(\xi) > 0$ επομένως από την (1) έχουμε:
$\frac{f(0)-f(x)}{-x} > 0 \leftrightarrow f(0)-f(x) > 0 \leftrightarrow f(x) < f(0) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (1+x)^{\nu}-1-\nu x < 0 \leftrightarrow (1+x)^{\nu} < 1+\nu x$.
Αν θεωρήσουμε το διάστημα $[0,x]$ τότε ισχύει σ'αυτό το θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \nu[(1+\xi)^{\nu-1}-1] =$
$= \frac{f(x)-f(0)}{x}$ (2) και επειδή $0 < \xi < x \rightarrow 1 < \xi+1 < x+1 \rightarrow$
$\rightarrow (\xi+1)^{\nu-1} < 1$ (γιατί $\nu-1 < 0$) $\rightarrow f'(\xi) < 0$ οπότε η (2) γίνεται $\frac{f(x)-f(0)}{x} < 0 \leftrightarrow f(x)-f(0) < 0 \leftrightarrow f(x) < f(0) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (1+x)^{\nu}-1-\nu x < 0 \leftrightarrow (1+x)^{\nu} < 1+\nu x$.
Άρα $\forall\ x > -1$ με $x \neq 0$ και $0 < \nu < 1$ ισχύει η δοσμένη ανισότητα.

Θέμα 2. Δείξετε ότι $e^{x}(2x+1) > 1\ \forall\ x\in(0,1)$.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^{x}(2x+1)-1$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$.
Άρα από το θ.Μ.Τ. έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,x)$ με $x < 1$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (1)
Αλλά είναι $f'(\xi) = 2e^{\xi}\xi+2e^{\xi}+e^{\xi} > 0$, άρα η (1) γίνεται
$\frac{f(x)-f(0)}{x} > 0 \leftrightarrow f(x) > f(0) \leftrightarrow e^{x}(2x+1)-1 > e^{0}(0+1)-1 \leftrightarrow$
$\leftrightarrow e^{x}(2x+1) > 1$.

Θέμα 3. Δείξετε ότι $\forall\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ισχύει συνx+xημx ≥ 1.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) =$ συνx+xημx-1.
Η f είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$

'Αρα στο διάστημα $[0,x] \subseteq [0, \frac{\pi}{2}]$ έχει εφαρμογή το Θ.Μ.Τ.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (1)

Είναι όμως $f'(\xi) = -ημ\xi+ημ\xi+\xi συν\xi = \xi συν\xi \geq 0$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$\frac{f(x)-f(0)}{x} \geq 0 \leftrightarrow f(x) \geq f(0) \leftrightarrow συνx+xημx-1 \geq 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow συνx+xημx \geq 1$.

Θέμα 4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ **δείξετε ότι** $x\ln x+e^{y-1} \geq xy$ **(1)**

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(y) = x\ln x+e^{y-1}-xy$ και είναι αρκετό να δείξουμε ότι $f(y) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[y,1+\ln x]$, $[1+\ln x,y]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα ανοιχτά $(y,1+\ln x)$, $(1+\ln x,y)$.

'Αρα υπάρχει $\xi \in (y,1+\ln x)$ αντίστοιχα $\xi \in (1+\ln x,y)$ βάσει του Θ.Μ.Τ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(1+\ln x)-f(y)}{1+\ln x-y}$ αντίστοιχα $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(1+\ln x)}{y-(1+\ln x)}$ (2)

Αλλά είναι $f'(\xi) = e^{\xi-1}-x$ και αν $y < \xi < 1+\ln x \rightarrow f'(\xi) < 0$ αν δε $1+\ln x < \xi < y \rightarrow f'(\xi) > 0$ οπότε η (2) δίνουν:

$\frac{f(1+\ln x)-f(y)}{1+\ln x-y} < 0$ αντίστοιχα $\frac{f(y)-f(1+\ln x)}{y-(1+\ln x)} > 0$

που ισοδυναμούν με $f(1+\ln x) < f(y)$ αντίστοιχα $f(y)-f(1+\ln x) >$ $> 0 \leftrightarrow f(y) > f(1+\ln x) \leftrightarrow f(y) > 0 \leftrightarrow x\ln x+e^{y-1}-xy > 0$.

Είναι $f(1+\ln x) = 0$.

Η ισότητα ισχύει όταν $y = 1+\ln x$.

Θέμα 5. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ **δείξετε ότι** $x \geq \frac{3ημx}{2+συνx}$

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x-\frac{3ημx}{2+συνx}$ και είναι αρκετό να δείξουμε ότι $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,x]$ παραγωγίσιμη στο $(0,x)$. 'Αρα με βάση το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ (1)

Αλλά είναι $f'(\xi) = 1 - \dfrac{3\sigma\upsilon\nu\xi(2+\sigma\upsilon\nu\xi)-3\eta\mu\xi(-\eta\mu\xi)}{(2+\sigma\upsilon\nu\xi)^2} =$

$= \dfrac{(2+\sigma\upsilon\nu\xi)^2-6\sigma\upsilon\nu\xi-3}{(2+\sigma\upsilon\nu\xi)^2} = \left(\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\xi}{2+\sigma\upsilon\nu\xi}\right)^2 \geq 0 \quad (2)$

Από τις (1) και (2) έχουμε: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \geq 0 \leftrightarrow f(x) \geq f(0)$

$\leftrightarrow x - \dfrac{3\eta\mu x}{2+\sigma\upsilon\nu x} \geq 0 \leftrightarrow x \geq \dfrac{3\eta\mu x}{2+\sigma\upsilon\nu x}$

Θέμα 6. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ δείξετε ότι: $\ln(x+1) > x - \dfrac{x^2}{2}$ (1)

Στη συνέχεια να βρεθεί το όριο της ακολουθίας:

$\alpha_\nu = (1+\dfrac{1}{\nu^2})(1+\dfrac{2}{\nu^2})\ldots(1+\dfrac{\nu}{\nu^2})$ (2)

Λύση: 1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \ln(x+1)-x+\dfrac{x^2}{2}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0,x] \subseteq \mathbb{R}_+$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(\xi)$ (3).

Αλλά $f'(\xi) = \dfrac{1}{\xi+1} - 1 + \xi = \dfrac{\xi^2-1+1}{\xi+1} = \dfrac{\xi^2}{\xi+1} > 0$ (4)

Από τις (3) και (4) έχουμε: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} > 0 \leftrightarrow f(x) > f(0)$

$\leftrightarrow \ln(x+1)-x+\dfrac{x^2}{2} > 0 \leftrightarrow \ln(x+1) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

2. Γνωρίζουμε ότι $1-\dfrac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1 \ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$.

Οπότε η (1) γίνεται: $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ (i)

Αν στην (i) θέσουμε όπου $x = \dfrac{1}{\nu^2}, \dfrac{2}{\nu^2}, \ldots, \dfrac{\nu}{\nu^2}$

παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\nu^2} - \dfrac{1}{2\nu^4} < \ln(1+\dfrac{1}{\nu^2}) < \dfrac{1}{\nu^2} \\ \dfrac{2}{\nu^2} - \dfrac{4}{2\nu^4} \leq \ln(1+\dfrac{2}{\nu^2}) < \dfrac{2}{\nu^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\nu}{\nu^2} - \dfrac{\nu}{2\nu^4} \leq \ln(1+\dfrac{\nu}{\nu^2}) < \dfrac{\nu}{\nu^2} \end{array}\right\} \quad (ii)$$

Με πρόσθεση των (ii) έχουμε:

$(\dfrac{1}{\nu^2}+\dfrac{2}{\nu^2}+\ldots+\dfrac{\nu}{\nu^2}) - \dfrac{1}{2}(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+\nu^2}{\nu^4}) <$

$< \ln(1+\dfrac{1}{\nu^2})(1+\dfrac{2}{\nu^2})\ldots(1+\dfrac{\nu}{\nu^2}) < \dfrac{1}{\nu^2}+\dfrac{2}{\nu^2}+\ldots+\dfrac{\nu}{\nu^2}$

$$\Rightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu^2} - \frac{1}{2}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^4} < \ln a_\nu < \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu^2} \quad \text{(iii)}$$

Αλλά $\lim\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2\nu^2} - \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{12\nu^4}\right] = \frac{1}{2}$ και $\lim \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu^2} = \frac{1}{2}$

'Αρα από γνωστή πρόταση των ακολουθιών έχουμε ότι

$\lim\ln a_\nu = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(\lim a_\nu) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim a_\nu = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \lim a_\nu = \sqrt{e}$

Θέμα 7. $\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ δείξετε ότι: $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \le |\alpha-\beta|$ (1)

Λύση: θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ γιατί η (1) γράφεται: $\left|\frac{\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta}{\alpha-\beta}\right| \le 1$ απ'όπου τα ημα,ημβ είναι οι αριθμητικές τιμές της συνάρτησης $y = f(x) = \eta\mu x$ για $x = \alpha,\beta$.
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (α,β)άρα θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (2)

Αλλά είναι $f'(\xi) = \sigma\upsilon\nu\xi$ (3).

Από τις (2) και (3) έχουμε: $\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha} = \sigma\upsilon\nu\xi \Rightarrow |\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha| =$
$= |\sigma\upsilon\nu\xi||\beta-\alpha| \le |\beta-\alpha|$ γιατί $\forall\ \xi \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu\xi| \le 1$.

'Αρα τελικά είναι $|\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta| \le |\alpha-\beta|\ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(Αν $\alpha = \beta$ η (1) είναι φανερή).

Θέμα 8. Να αποδειχτούν οι ανισότητες

i) $\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x},\ x > 0$

ii) $1 \le \frac{e^x-1}{x} \le e^x,\ x > 0$

iii) $\frac{1}{x} \le \frac{\ln x}{x-1} \le 1,\ x > 1$

Λύση: 1) Η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln x < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x} < \frac{1}{x} \quad (1)$$

Η (1) μας διευκολύνει να θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \ln x$ που είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x,x+1]$ παραγωγίσιμη στο ανοιχτό $(x,x+1)$. 'Αρα θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (x,x+1)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}$ (2). Αλλά είναι $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$ (3).

Από τις (1), (2), (3) αρκεί να δείξουμε ότι:

$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \iff x+1 > \xi > x$ που είναι αληθινό.

ii) Η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$1 \le \frac{e^x-e^0}{x-0} \le e^x$ που μας διευκολύνει να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ συνεχή στο $[0,x]$ παραγωγίσιμη στο $(0,x)$ άρα Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (1) Αλλά είναι $f'(\xi) = e^{\xi}$ (2)

Από (ii), (1), (2) αρκεί να δείξουμε ότι

$1 \le e^{\xi} \le e^x \iff 0 < \xi < x$ που ισχύει.

iii) Η ανισότητα γράφεται: $\frac{1}{x} \le \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \le 1$ (1)

Από την (1) οδηγούμεθα να θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \ln x$ που είναι συνεχής στο κλειστό $[1,x]$ παραγωγίσιμη στο $(1,x)$. Άρα Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (1,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (2). Αλλά είναι $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$ (3)

Από τις (1), (2), (3) αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$\frac{1}{x} \le \frac{1}{\xi} \le 1 \iff x \ge \xi \ge 1$ που είναι αληθινό.

Θέμα 9. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) Παραγωγίζεται δύο φορές στο $\mathbb{R}$.

ii) Το ξ του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x,y]$ είναι πάντα $\frac{x+y}{2}$

Λύση: Αφού για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[x,y]$ και είναι $\xi = \frac{x+y}{2}$ έχουμε $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \iff f'\left(\frac{x+y}{2}\right) =$

$= \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ (1)

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (1) ως προς x έχουμε

$f''\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)'(y-x)+f'\left(\frac{x+y}{2}\right)(y-x)' = -f'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f''\left(\frac{x+y}{2}\right)(y-x)-f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = -f'(x)$ (2)

Αν στην (2) θέσουμε όπου y το -x παίρνουμε:

$\frac{1}{2}f''(0)(-2x)-f'(0) = -f'(x) \rightarrow f'(x) = f'(0)+xf''(0)$ (3)

Αν στην (3) θέσουμε $f'(0) = \beta$ και $f''(0) = 2\alpha$ έχουμε:
$f'(x) = 2\alpha x+\beta$.
Άρα η f έχει τύπο: $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Θέμα 10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = ημx$.

Δείξετε ότι: $ημ55° < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{18}$

Λύση: Η ύπαρξη του αριθμού $\frac{\sqrt{2}}{2} = ημ45°$ μας οδηγεί να θεωρήσουμε το διάστημα $[45°,55°]$ στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(45°,55°)$.
Άρα Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (45°,55°)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{ημ55°-ημ45°}{55°-45°} = \frac{ημ55°-\frac{\sqrt{2}}{2}}{10°} = \frac{ημ55°-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{18}} \quad (1)$$

Αλλά $f'(\xi) = συν\xi < 1$ γιατί $45° < \xi < 55°$.
Άρα η (1) γίνεται:

$$\frac{ημ55°-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{18}} < 1 \rightarrow ημ55° < \frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Θέμα 11. Δείξετε ότι: $\sqrt{85}-9 < \frac{2}{9}$

Λύση: Επειδή $\sqrt{81} = 9$ η για απόδειξη γράφεται $\sqrt{85}-\sqrt{81} < \frac{2}{9}$
Με αυτή την μορφή οδηγούμεθα να θεωρήσουμε τη συνάρτηση με $f(x) = \sqrt{x}$.
Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[81,85]$ και παραγωγίσιμη στο $(81,85)$. Άρα Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (81,85)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{f(85)-f(81)}{85-81} = \frac{\sqrt{85}-\sqrt{81}}{4} = \frac{\sqrt{85}-9}{4} \quad (1)$$

Αλλά είναι $81 < \xi < 85 \rightarrow \sqrt{81} < \sqrt{\xi} < \sqrt{85} \rightarrow 9 < \sqrt{\xi} < \sqrt{85} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{2.9} > \frac{1}{2\sqrt{\xi}} > \frac{1}{2\sqrt{85}} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι: $\frac{\sqrt{85}-9}{4} < \frac{1}{18} \rightarrow \sqrt{85}-9 < \frac{2}{9}$

Θέμα 12. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με f'(x) ↑ στο $\mathbb{R}$.
Δείξετε ότι: $f'(x+1) > f(x+1)-f(x) > f'(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Επειδή η f έχει παράγωγο στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής άρα από το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x,x+1] \subset \mathbb{R}$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1)-f(x)$ (1)

Επειδή δε $x < \xi < x+1$ και η f' είναι αύξουσα συνάρτηση έχουμε $f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1)$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$f'(x) < f(x+1)-f(x) < f'(x+1)$ δηλαδή την αποδεικτέα.

Θέμα 13. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = x-συνx.
Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \frac{\pi}{4})$ έτσι ώστε $f(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\pi}{4}-\alpha)f'(\xi)$ (1) όπου $f(\alpha) = 0$ με $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\pi}{4}\right]$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \frac{\pi}{4})$. Άρα από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{\pi}{4})-f(\alpha)}{\frac{\pi}{4}-\alpha} \Leftrightarrow f'(\xi)(\frac{\pi}{4}-\alpha) = f(\frac{\pi}{4})$$

Είναι δε $f(\alpha) = 0$ γιατί από το Θ. Bolzano έχουμε:

$$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{6})f(\frac{\pi}{4}) < 0$$

Άρα υπάρχει $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) = 0$.

Εύκολα δείχνεται ότι το α είναι μοναδικό.

Θέμα 14. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Έστω ακόμη $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε: $|f'(x)| < \kappa\ \forall\ x \in (\alpha,\beta)$ και $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha,\beta)$, $\rho_1 \neq \rho_2$.
Δείξετε ότι $|f(\rho_1)-f(\rho_2)| < \kappa[\rho_1-\rho_2]$.

Λύση: Για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Άρα και στο $[\rho_1,\rho_2] \subseteq [\alpha,\beta]$.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1,\rho_2)$ έτσι ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(\rho_1)-f(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2} \rightarrow |f(\rho_1)-f(\rho_2)| = |f'(\xi)||\rho_1-\rho_2|$ (1)

και επειδή $|f'(x)| < \kappa \ \forall \ x \in (\rho_1,\rho_2) \rightarrow |f'(\xi)| < \kappa$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $|f(\rho_1)-f(\rho_2)| < \kappa|\rho_1-\rho_2|$.

Θέμα 15. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = e^{f(x)}(x-\alpha)(x-\beta)$.

Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{\alpha+\beta-2\xi}{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}$

Λύση: Για την συνάρτηση g ισχύει το Θ.Μ.Τ. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1)

Ακόμη για την g ισχύει $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ (2).

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $g'(\xi) = 0$ (3)

Βρίσκουμε την παράγωγο της g στη θέση $x = \xi$ και έχουμε:

$g'(\xi) = f'(\xi)e^{f(\xi)}(\xi-\alpha)(\xi-\beta)+e^{f(\xi)}(\xi-\beta+\xi-\alpha) \rightarrow$

$\rightarrow e^{f(\xi)}\,(f'(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)+2\xi-\alpha-\beta) = 0 \rightarrow f'(\xi) = \frac{\alpha+\beta-2\xi}{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}$

Θέμα 16. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f(0) = 0$, και $f(1) = 1$.

Δείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_\nu \in (0,1)$ τέτοια ώστε: $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f'(\xi_\kappa) = \nu$

Λύση: Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε ν ίσα διαστήματα με πλάτος $\frac{1}{\nu}$ που είναι τα $[0,\frac{1}{\nu}],[\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu}],\dots,[\frac{\nu-1}{\nu},\frac{\nu}{\nu}]$ σε κάθε ένα από αυτά η f πληροί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ, άρα υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_\nu$ που να ανήκουν σε κάθε ένα από τα ανοιχτά αυτά διαστήματα αντίστοιχα με τις ιδιότητες:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{1}{\nu})-f(0)}{\frac{1}{\nu}-0},\ f'(\xi_2) = \frac{f(\frac{2}{\nu})-f(\frac{1}{\nu})}{\frac{2}{\nu}-\frac{1}{\nu}},\ \dots,$$

$$f'(\xi_\nu) = \frac{f(\frac{\nu}{\nu})-f(\frac{\nu-1}{\nu})}{\frac{\nu}{\nu}-\frac{\nu-1}{\nu}} \quad (1)$$

Αν αθροίσουμε τις σχέσεις (1) παίρνουμε:

$$\sum_{x=1}^{\nu} f'(\xi_x) = \frac{f(1)-f(0)}{\frac{1}{\nu}} = \frac{1-0}{\frac{1}{\nu}} = \nu$$

Θέμα 17. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη δύο φορές στο [α,β] και ισχύει:

i) $f''(x) \geq 0 \;\forall\; x \in [\alpha,\beta]$ τότε $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ii) $f''(x) \leq 0 \;\forall\; x \in [\alpha,\beta]$ τότε $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Λύση: i) Η ύπαρξη του $\frac{\alpha+\beta}{2}$ στην αποδεικτέα μας οδηγεί να θεωρήσουμε τα διαστήματα $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ και $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Άρα θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})$

τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ (1)

Όμοια στο διάστημα $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ η f είναι παραγωγίσιμη επομένως θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi\ ) = \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (2)$$

Επίσης στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ η συνάρτηση f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη άρα θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} \quad (3)$$

Αλλά είναι $f''(\xi) \geq 0$ και $\xi_2-\xi_1 > 0$ οπότε η (3) γίνεται $f'(\xi_2)-f'(\xi_1) \geq 0$ (4).

Η (4) λόγω των (1) και (2) γίνεται:

$$-\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} + \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \geq 0 \leftrightarrow -2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\alpha)+$$

$$+f(\beta) \geq 0 \leftrightarrow \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Όμοια γίνεται η απόδειξη και της (ii).

Θέμα 18. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) για την οποία ισχύουν:

i) $f(\alpha) = f(\beta)$

ii) $f'(x) \geq 0 \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$

Δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση: Έστω ένα $x \in (\alpha,\beta)$ τότε στα διαστήματα $[\alpha,x]$, $[x,\beta]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,x)$ και $\xi_2 \in (x,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ (1) και $f'(\xi_2) = \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}$ (2). Επειδή όμως από (ii) $f'(\xi_1) \geq 0, f'(\xi_2) \geq 0$

Οι (1) και (2) δίνουν: $f(x)-f(\alpha) \geq 0$ και $f(\beta)-f(x) \geq 0$ ή $f(x) \geq f(\alpha)$ και $f(x) \leq f(\beta)$ (3).

Από τις (3) (αντισυμμετρική ιδιότητα) είναι $f(x) = f(\alpha) = f(\beta) = c \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$. Άρα $f(x) = c$.

Θέμα 19. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη $\forall \ x \in [0,1]$ ισχύουν δε γιαυτήν οι σχέσεις:

i) $f'(x) \geq \lambda > 0 \ \forall \ x \in [0,1]$

ii) $f(0) = 0$

Δείξετε ότι υπάρχει (υποδιάστημα) του $[0,1]$ μήκους $\frac{1}{2}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x) \geq \frac{\lambda}{2}$

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι $x \in [\frac{1}{2},1]$ τότε στο διάστημα $[0,x] \subseteq [0,1]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ οπότε είναι $f(x)-f(0) = f'(\xi)(x-0)$ με $\xi \in (0,x)$. Δηλαδή $f(x) = xf'(\xi)$ (1) λόγω της (ii).

Αλλά από την (i) έχουμε ότι: $xf'(\xi) \geq \lambda x$ (2) και από την $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \rightarrow \frac{\lambda}{2} \leq \lambda x \leq \lambda$ (3).

Από τις (1), (2), (3) έχουμε ότι: $f(x) \geq \lambda x \geq \frac{\lambda}{2} \rightarrow$

$\rightarrow f(x) \geq \frac{\lambda}{2}$.

Θέμα 20. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \rightarrow R$ για την οποία ισχύουν: i) $f'(x) \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$

ii) $|f'(x)| \leq \varphi \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$

Δείξετε ότι η f είναι φραγμένη.

Λύση: Έστω $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $\xi \neq x$ τότε στο διάστημα $[x,\xi]$ ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\gamma \in (x,\xi)$ έτσι ωστε: $f'(\xi)-f(x) = f'(\gamma)(\xi-x) \rightarrow |f(x)-f(\xi)| =$
$= |f'(\gamma)||x-\xi| \leq |x-\xi|\varphi$ (1) λόγω της (ii).
Επειδή όμως $\alpha < x < \beta$ και $\alpha < \xi < \beta \rightarrow \alpha < x < \beta$ και $-\beta < -\xi < -\alpha$
$\rightarrow \alpha-\beta < x-\xi < \beta-\alpha \rightarrow -(\beta-\alpha) < x-\xi < \beta-\alpha \leftrightarrow |x-\xi| < \beta-\alpha$ (2)
Από τις (1) και (2) έχουμε:
$|f(x)-f(\xi)| < \varphi(\beta-\alpha)$ (3) $\forall x \in (\alpha,\beta)$.
Η (3) γράφεται: $|f(x)| - |f(\xi)| \leq |f(x)-f(\xi)| < \varphi(\beta-\alpha)$
$\rightarrow |f(x)| < f(\xi)+\varphi(\beta-\alpha) = \theta \ \forall x \in (\alpha,\beta) \rightarrow |f(x)| < \theta$
$\forall x \in (\alpha,\beta)$. Άρα η f είναι φραγμένη.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να αποδειχτούν οι ανισότητες:

i) $e^{\alpha} < \dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha} < e^{\beta} \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^*_+$ με $\alpha < \beta$

ii) $1-\dfrac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1 \ \forall x \in \mathbb{R}^*_+$

iii) $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) < x \ \forall x \in \mathbb{R}^*_+$

iv) $\dfrac{\ln x}{x-1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ \forall x \in \mathbb{R}^*_+ - \{1\}$

2. Όμοια να αποδειχτούν με την μέθοδο Lagrange οι ανισότητες:

i) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu\alpha} > \dfrac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi\alpha}$ με $0 < x < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

ii) $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta} < \ln\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha} \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$ με $\beta < \alpha$

iii) $\dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \leq \varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta \leq \dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2 u}$ με $0 < \alpha,\beta < \dfrac{\pi}{2}$

iv) $\varepsilon\varphi\alpha \leq \dfrac{\ln\sigma\upsilon\nu\alpha-\ln\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta-\alpha} \leq \varepsilon\varphi\beta$ με $0 < \alpha \leq \beta < \dfrac{\pi}{2}$

v) $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln\alpha < \dfrac{1}{\alpha} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*_+$

3. Να αποδειχτούν οι ανισότητες

i) $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}^*$ με $x < 1$

ii) $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ με $0 < x < 1$

iii) $\pi \leq \frac{ημ(\pi x)}{x(1-x)} \leq 4$ με $0 < x < 1$

iv) $\ln x \leq \frac{x}{e}$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}_+^*$

4. Εάν $\nu \in \mathbb{N}$: $\nu > \theta^2$ με $\theta \in \mathbb{N}^*$ δείξετε ότι: $\sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu} < \frac{1}{2\theta}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0) = 0$ και $f(1)=1$ Δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu \in (0,1)$ διαφορετικοί μεταξύ τους τέτοιοι ώστε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{f(\xi_\kappa)} = \nu$$

6. $\forall$ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $εφx + 2ημx > 3x$.

7. Αν υπάρχει η f' της f και είναι γνήσια αύξουσα τότε:

i) $f(x-1) - f(x) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$

ii) ισχύει $\forall$ $\nu \in \mathbb{N}^*$ $\frac{2}{3}\sqrt{\nu^3} < \sum_{\kappa=1}^{\nu} \sqrt{\kappa} < \frac{2}{3}\sqrt{(\nu+1)^3} - 1$

8. Αν η συνάρτηση f έχει πεπερασμένη πρώτη και δεύτερη παράγωγο $\forall$ $x \in [\alpha, \beta]$.
Δείξετε ότι $\exists$ $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$f(\alpha) = f(\beta) + (\alpha-\beta) f'(\beta) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 f''(\xi')$

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε δείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστο σημεία $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(\rho_1) + f'(\rho_2) = 0.$$

10. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\theta-t, \theta+t]$ παραγωγίσιμη στο $(\theta-t, \theta+t)$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:
$f(\theta+t)-f(\theta-t) = t[f'(\theta+\xi t)+f'(\theta-\xi t)]$.

11. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

Δείξετε ότι $\forall\ x\in\mathbb{R}$ με $x > e$ ισχύει:
$\frac{\ln(x+1)}{x+1} < f(x+1)-f(x) < \frac{\ln x}{x}$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x) \neq 0\ \forall\ x\in(\alpha,\beta)$.
Δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:
$f'(\xi) = f(\xi)\left[\frac{1}{\alpha-\xi} + \frac{1}{\beta-\xi}\right]$

13. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{4}{x}$, $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Να βρείτε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της είναι παράλληλη προς την χορδή που περνά από τα σημεία A(4,1), B(2,2).

14. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x$.
Να εφαρμοστεί το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[\nu,\nu+1]$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Σε συνέχεια να δειχτεί ότι η ακολουθία
$\alpha_\nu = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu}-\ln\nu$ συγκλίνει.

15. Με το Θ.Μ.Τ δείξτε τις ανισότητες

i) $(1+x)^\rho \geq 1+\rho x$, $\rho\geq 1$ ή $\rho\leq 0$ και $x>-1$

ii) $\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1\ \forall\ x\in(1,+\infty)$

iii) $\sqrt{104}-10 < 0,2$

iv) $\frac{1}{3} < \ln 1,5 < \frac{1}{2}$

16. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στη θέση $x = \xi$ και την συνάρτηση $f(x) = [f(x)]^2$.
Εάν $f(\xi) = 0$ τότε δείξετε ότι το γινόμενο $f(x)f'(x)$ αλλάζει πρόσημο σε μια περιοχή του σημείου ξ.

5.17. Παράγουσα συνάρτηση της f.

Ορισμός. Ονομάζουμε **παράγουσα ή αρχική συνάρτηση της f** με πεδίο ορισμού το Δ κάθε συνάρτηση F ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ τέτοια ώστε $F' = f$.

Πρόταση. Αν F μια παράγουσα της f τότε οι συναρτήσεις F+c είναι το σύνολο όλων των παραγουσών της f όπου c = σταθερά

Απόδειξη: Αν F μια παράγουσα της f δηλαδή $F' = f$ τότε είναι και $(F+c)' = F'+0 = f$.

Αντίστροφα: Έστω F και F+c δύο συναρτήσεις τότε επειδή $F' = (F+c)'$ οι συναρτήσεις θα διαφέρουν κατά μια σταθερά δηλαδή $F+c-F = c$ που σημαίνει ότι κάθε παράγουσα της f είναι της μορφής F+c, c = σταθερά.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

f	F	f	F	f	F
0	c	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x+c$	α^x	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c$
1	$x+c$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi x+c$	$\frac{1}{x}$, $x>0$	$\ln x+c$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$-\sigma\varphi x+c$	$\frac{1}{x\ln\alpha}$	$\log_\alpha x+c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	e^x	e^x+c		
$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x+c$				

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστούν οι παράγουσες των συναρτήσεων

1. $f(x) = x^8+x^5-x^4$
2. $g(x) = x^{-3}+x^{-2}$
3. $h(x) = 3\eta\mu x$
5. $f_1(x) = \frac{4}{x^4}$
6. $g_1(x) = \frac{2}{x}+e^x$
7. $h_1(x) = \eta\mu x+e^{2x}$

4. $\varphi(x) = 5\sigma\upsilon\nu x + x^2$

Λύση: 1. Είναι $F(x) = \frac{x^9}{9} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + c$. Πράγματι έχουμε:

$F'(x) = \frac{9x^8}{9} + \frac{6x^5}{6} - \frac{5x^4}{5} = x^8 + x^5 - x^4$

2. Όμοια είναι: $G(x) = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1} + c$. Πράγματι έχουμε:

$G'(x) = \frac{-2x^{-3}}{-2} + \frac{(-1)x^{-2}}{-1} = x^{-3} + x^{-2}$

3. Είναι $H(x) = -3\sigma\upsilon\nu x + c$.

4. $\Phi(x) = 5\eta\mu x + \frac{x^3}{3} + c$.

5. Είναι $f_1(x) = 4x^{-4}$ οπότε η παράγουσα της είναι:

$F_1(x) = 4\,\frac{x^{-3}}{-3} + c$.

6. Είναι $G_1(x) = 2\ln x + e^x + c$. Πράγματι είναι:

$G_1'(x) = 2\,\frac{1}{x} + e^x = g_1(x)$.

7. Είναι $H_1(x) = -\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c$. Πράγματι έχουμε:

$H_1'(x) = (-\sigma\upsilon\nu x)' + (\frac{1}{2}\,e^{2x})' = \eta\mu x + \frac{1}{2}e^{2x}(2x)' = \eta\mu x + e^{2x}$.

2. Όμοια να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων.

1. $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 2$

2. $g(x) = x^2 - \frac{3}{x}$

3. $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

4. $f_1(x) = 5e^{4x+2}$

5. $g_1(x) = e^x + xe^x$

6. $h_1(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$

Λύση: 1. Είναι $F(x) = 5\,\frac{x^5}{5} - 3\,\frac{x^4}{4} + 6\,\frac{x^3}{3} - 4\,\frac{x^2}{2} + 2x + c$.

2. $G(x) = \frac{x^3}{3} - 3\ln x + c$.

3. $H(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + c$.

4. Είναι $F_1(x) = \frac{5}{4}\,e^{4x+2} + c$.

5. Είναι $G_1(x) = x'e^x + x(e^x)' = xe^x + c$.

6. Είναι $H_1(x) = \frac{\eta\mu x}{x} + c$. Πράγματι έχουμε:

$H_1'(x) = \frac{(\eta\mu x)'x - \eta\mu x x'}{x^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x x - \eta\mu x}{x^2} = h_1(x)$.

3. Να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων με τύπους:

i. $f(x) = \eta\mu(\alpha x+\beta)$ ii. $h(x) = e^{\alpha x+\beta}$

iii. $g(x) = \frac{1}{(x-\rho)^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

Λύση: i) Είναι: $F(x) = -\frac{1}{\alpha}\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)+c$. Πράγματι έχουμε:

$F'(x) = -\frac{1}{\alpha}[-\eta\mu(\alpha x+\beta)](\alpha x+\beta)'] = \eta\mu(\alpha x+\beta)$.

ii) Είναι: $H(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}+c$. Πράγματι έχουμε:

$H'(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}(\alpha x+\beta)' = e^{\alpha x+\beta}$.

iii) Είναι: $G(x) = -\frac{1}{\nu-1}\;\frac{1}{(x-\rho)^{\nu-1}} + c$ με $\nu \neq 1$. Πράγματι έχουμε: $G'(x) = -\frac{1}{\nu-1}[(x-\rho)^{-(\nu-1)}]' = -\frac{1}{\nu-1}(-(\nu-1)(x-\rho)^{-(\nu-1)-1}$

$(x-\rho)') = (x-\rho)^{-\nu+1-1} = \frac{1}{(x-\rho)^\nu}$

Αν $\nu = 1$ τότε είναι $G(x) = \ln[x-\rho]+c$. Πράγματι έχουμε:

$G'(x) = \frac{1}{x-\rho}(x-\rho)' = \frac{1}{x-\rho}$

4. Να υπολογιστούν οι παράγουσες των συναρτήσεων:

i) $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$ ii) $h(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

iii) $g(x) = (\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)\sqrt{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση: **i)** Είναι $F(x) = e^{x^2+x}+c$. Πράγματι έχουμε:

$F'(x) = e^{x^2+x}(x^2+x)' = (2x+1)e^{x^2+x}$

ii) Είναι $H(x) = 2\eta\mu\sqrt{x}+c$. Πράγματι είναι:

$H'(x) = 2\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}(\sqrt{x})' = 2\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

iii) Είναι $G(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^3}+c$. Πράγματι έχουμε:

$G'(x) = \left(\frac{2}{3}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{3}{2}}+c\right)' =$

$= \frac{2}{3}\,\frac{3}{2}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{3}{2}-1}\,(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)' = (\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{2}}\,(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x) =$

$= (\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)\sqrt{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}.$

5. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^*_+$ και τέτοια ώστε:$f'(x)+\frac{f(x)}{x^2} = 0 \forall x\in\mathbb{R}^*_+$ (1), f(2) = 1.

Λύση: Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$e^{\frac{1}{x}}f'(x)+(e^{\frac{1}{x}})\frac{1}{x^2}f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{x}}f'(x)+(e^{-\frac{1}{x}})'f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{-\frac{1}{x}}f(x)')=0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{x}}f(x) = c$ (c = σταθερά) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \frac{c}{e^{-\frac{1}{x}}}\ \forall\ x\in\mathbb{R}^*_+$ και με x = 2 παίρνουμε:

$f(2) = \frac{c}{e^{-\frac{1}{2}}} = 1 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = c \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} = c$

Και ο τύπος της f είναι: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}$

6. Να βρεθεί ό τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης f για την οποία ισχύει f(1) = 1 και $f'+\ln\alpha f = 0$ (1).

Λύση: Η (1) $\Leftrightarrow \alpha^x f'(x)+\alpha^x\ln\alpha f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha^x f'(x)+(\alpha^x)'f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha^x f)' = 0 \Rightarrow \alpha^x f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = \frac{c}{\alpha^x}$ και επειδή f(1) = 1

έχουμε: $1 = \frac{c}{\alpha} \Rightarrow c = \alpha.$

Άρα ο τύπος της f είναι: $f(x) = \alpha^{-x+1}$.

7. Εάν α,β,γ,δ $\in\mathbb{R}$ και ισχύει: $\frac{\alpha}{1}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{3}+\frac{\delta}{4} = 0$

Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο διάστημα (0,1).

Λύση: Επειδή θέλουμε να αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο f(x) έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο (0,1) θα πρέπει το f(x) να είναι μια παράγουσα κάποιου πολυώνυμου F(x).

Μια παράγουσα του f(x) είναι $F(x) = \frac{\alpha x}{1}+\frac{\beta x^2}{2}+\frac{\gamma x^3}{3}+\frac{\delta x^4}{4}$

Για το πολυώνυμο $F(x)$ στο διάστημα $(0,1)$ ισχύουν οι συνθήκες του Rolle επειδή $F(0) = F(1) = 0$, άρα υπάρχει πραγματικός αριθμός τουλάχιστο ένας στο $(0,1)$ έτσι ώστε $F'(\rho) = 0$.
Αλλά $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in (0,1)$.
Επομένως για το πολυώνυμο $f(x)$ υπάρχει $\rho \in (0,1)$ έτσι ώστε $f(\rho) = 0$ και επομένως το $f(x)$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα.

8. Να βρείτε μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+10}$.

Λύση: Είναι: $f(x) = \frac{(x^2+3x+10)'}{x^2+3x+10}$ επομένως μια παράγουσα της $f(x)$ είναι $F(x) = \ln(x^2+3x+10)+c$.
Πράγματι έχουμε $F'(x) = (\ln(x^2+3x+10)+c)' =$

$$= \frac{1}{x^2+3x+10}(x^2+3x+10)' = \frac{2x+3}{x^2+3x+10}$$

9. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την σχέση $f'(x) = f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Η δοσμένη σχέση γράφεται: $f'(x)-f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x)-(e^x)'f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x f'(x)-(e^x)'f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^x}\right]' = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ (1).$$ Άρα με βάση γνωστή πρόταση είναι: $\frac{f(x)}{e^x} = c \Rightarrow f(x) = ce^x$.

10. Να βρείτε την οικογένεια των καμπύλων των οποίων η εφαπτόμενη σε κάθε σημείο τους έχει συντελεστή διεύθυνσης 2x. Ποιά από αυτές τις καμπύλες διέρχεται από το σημείο $(\sqrt{3},0)$;

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης σ'ένα σημείο (x_0,y_0) του διαγράμματος της f είναι $f'(x_0)$ και στο τυχαίο $f'(x)$. Άρα είναι $f'(x) = 2x$.
Επομένως η συνάρτηση $F(x) = 2x$ είναι μια παράγουσα της f.
Άρα η f είναι $f(x) = 2\frac{x^2}{2}+c = x^2+c$ (1)
Επειδή η (1) διέρχεται από το σημείο $(\sqrt{3},0)$ ισχύει:
$0 = (\sqrt{3})^2+c \Leftrightarrow c = -3$.
Συνεπώς η καμπύλη της οικογένειας που διέρχεται από το σημείο $(\sqrt{3},0)$ είναι η $f(x) = x^2-3$.

5.18. Απροσδιόριστες μορφές.
'Αρση αοριστίας και κανόνες του de l' Hospital

Τις οριακές τιμές των μορφών:

α. $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ με $\lim\limits_{x\to\xi}f_1(x) = \lim\limits_{x\to\xi}f_2(x) = 0$, δηλαδή του τύπου $(\frac{0}{0})$.

β. $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ με $\lim\limits_{x\to\xi}f_1(x) = \lim\limits_{x\to\xi}f_2(x) = +\infty$ ή $(-\infty)$, δηλαοη του τύπου $(\frac{+\infty}{+\infty})$ ή $(\frac{-\infty}{-\infty})$.

γ. $\lim\limits_{x\to\xi}[f_1(x)f_2(x)]$ με $\lim\limits_{x\to\xi}f_1(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to\xi}f_2(x) = +\infty$, δηλαδή του τύπου $(0,+\infty)$.

δ. $\lim\limits_{x\to\xi}[f_1(x)]^{f_2(x)}$ με $\lim\limits_{x\to\xi}f_1(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\xi}f_2(x) = 0$, δηλαδή του τύπου $(+\infty^0)$ κ.ο.κ. των τύπων $(+\infty)-(+\infty)$, 0^0, $1^{+\infty}$ καλούμε απροσδιόριστες μορφές, γιατί γι'αυτές δεν μπορεί να εφαρμοστούν απ'ευθείας τα θεωρήματα των ορίων επειδή, όπως ξέρουμε οι αντίστοιχες πράξεις $\frac{0}{0}$, κλπ. δεν είναι επιτρεπτές

Μερικές προτάσεις που αναφέρουμε παρακάτω με την ονομασία "Κανόνες του de l' Hospital" μας βοηθούν στην άρση, όπως λέμε, αυτών των αοριστιών.

Πρόταση 1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2, οι οποίες είναι ορισμένες σε μια περιοχή του σημείου $\xi \in \mathbb{R}$.

Εάν ισχύει ότι:

1. Υπάρχουν οι παράγωγοι στην θέση $x = \xi \in \pi(\xi,\varepsilon)$

2. $f_2'(\xi) \neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to\xi}f_1(x) = \lim\limits_{x\to\xi}f_2(x) = 0$ τότε:

α. Ορίζεται το πηλίκο $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ στη περιοχή $\pi(\xi,\varepsilon)-\{\xi\}$, και

β. Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ και είναι $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1'(\xi)}{f_2'(\xi)}$

Απόδειξη: Επειδή οι f_1 και f_2 έχουν παράγωγο στη θέση $x = \xi \in \pi(\xi,\varepsilon)$ έπεται, ότι αυτές είναι συνεχείς στην θέση $x = \xi$ και τότε θα έχουμε: $\lim\limits_{x\to\xi}f_1(x) = f_1(\xi)$ και $\lim\limits_{x\to\xi}f_2(x) = f_2(\xi)$.

Επειδή από την υπόθεση θα έχουμε ότι: $f_1(\xi) = f_2(\xi) = 0$. Επειδή $f_2'(\xi) \neq 0$ θα έχουμε: $f_2'(\xi) > 0$ ή μόνο $f_2'(\xi) < 0$.

Ας υποθέσουμε ότι είναι: $f_2'(\xi) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η f_2

είναι γνήσια αύξουσα στην θέση $x = \xi$, δηλαδή υπάρχει περιοχή του ξ η $\pi(\xi,\varepsilon)$ έτσι ώστε: $f_2(x) < f_2(\xi) = 0 \ \forall \ x \in (\xi-\varepsilon,\xi)$ και $f_2(x) > f_2(\xi) = 0 \ \forall \ x \in (\xi,\xi+\varepsilon)$ και επομένως είναι $f_2(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \pi(\xi,\varepsilon)-\{\xi\}$.

Ώστε το πηλίκο $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ είναι εντελώς ορισμένο $\forall \ x \in \pi(\xi,\varepsilon)-\{\xi\}$

Έστω τώρα ότι $f_2'(\xi) < 0$ τούτο σημαίνει ότι η f_2 είναι γνήσια φθίνουσα στην θέση $x = \xi \in \mathbb{R}$, δηλαδή υπάρχει περιοχή του ξ η $\pi(\xi,\varepsilon)$ έτσι ώστε: $f_2(x) > f_2(\xi) = 0 \ \forall \ x \in (\xi-\varepsilon,\xi)$ και $f_2(x) < f_2(\xi) = 0 \ \forall \ x \in (\xi,\xi+\varepsilon)$ και επομένως είναι:

$f_2(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \pi(\xi,\varepsilon)-\xi$ και το πηλίκο $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ και πάλι είναι εντελώς ορισμένο $\forall \ x \in \pi(\xi,\varepsilon)-\{\xi\}$.

Επειδή $f_1(\xi) = f_2(\xi) = 0$ θα είναι:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{f_2(x)-f_2(\xi)} = \lim_{x\to\xi}\frac{\frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi}}{\frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f_1(x)-f_1(\xi)}{x-\xi}}{\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f_2(x)-f_2(\xi)}{x-\xi}} = \frac{f_1'(\xi)}{f_2'(\xi)}$$

Παρατηρήσεις.

1. Τον κανόνα αυτό του de l' Hospital θα εφαρμόζουμε, όταν έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

2. Η πρόταση ισχύει και όταν ακόμη οι f_1 και f_2 είναι ορισμένες σε μια πλευρική περιοχή του σημείου ξ, δηλαδή στην $(\xi-\varepsilon,\xi]$ ή $[\xi,\xi+\varepsilon)$ και τότε οι οριακές τιμές είναι πλευρικές.

Παράδειγμα 1. Με τον κανόνα του de l' Hospital υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+3}$ **β.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{e^x-1}$

Απάντηση: α) Θέτουμε $f_1(x) = x^3-3x^2+2x$ και $f_2(x) = x^2-4x+3$ Παρατηρούμε ότι: $\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R}$ και $\mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}$. Επομένως και οι δύο είναι ορισμένες σε μια περιοχή του σημείου 1, π.χ. την $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Προφανώς υπάρχουν οι παράγωγοι αυτών στη θέση $x = 1$ και είναι $f_2'(x) = 2x-4$ και συνεπώς $f_2'(1) = -2 \neq 0$. Επίσης είναι: $\lim\limits_{x\to1} f_1(x) = 0 = \lim\limits_{x\to1} f_2(x) = 0$

Βάσει αυτών πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις της πρότασης

και επομένως: $\lim_{x\to1}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1'(1)}{f_2'(1)} = \frac{3.1^2-6.1+2}{2.1-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

β. Θέτουμε: $f_1(x) = \log(x+1)$ και $f_2(x) = e^x-1$. Είναι:
$\mathcal{D}(f_1) = (-1,+\infty)$ και $\mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}$. Και οι δύο λοιπόν είναι ορισμένες σε μια περιοχή του 0 π.χ. την π(0,ε).

Οι παράγωγοι αυτών είναι αντίστοιχα:

$f_1'(x) = \frac{(x+1)'}{1+x} = \frac{1}{1+x}$ και $f_2'(x) = e^x$, οι οποίες υπάρχουν στην θέση x = 0 και μάλιστα $f_2'(0) = e^0 = 1 \neq 0$.

Επίσης είναι: $\lim_{x\to0}\log(1+x) = \log 1 = 0$ και $\lim_{x\to0} f_2(x) = e^0-1 = 0$

δηλαδή: $\lim_{x\to0} f_1(x) = \lim_{x\to0} f_2(x) = 0$. Ώστε υπάρχουν όλες οι προϋποθέσεις για την ισχύ της πρότασης και συνεπώς και την εφαρμογή του κανόνα.

Έχουμε: $\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1'(0)}{f_2'(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί το $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}$ με τον κανόνα του de l' Hospital.

Απάντηση: Θέτουμε $f_1(x) = \sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}$ και $f_2(x) = x+2x^2$.

Η πρώτη συνάρτηση είναι ορισμένη $\forall\ x\in(-\frac{1}{3},+\infty)$ και η δεύτερη $\forall x\in\mathbb{R}$, και επομένως είναι και οι δύο ορισμένες σε μια περιοχή του μηδενός. Οι παράγωγοι αυτών είναι αντίστοιχα:

$f_1'(x) = (\sqrt{1+2x})'-(\sqrt{1+3x})' = \frac{(1+2x)'}{2\sqrt{1+2x}} - \frac{(1+3x)'}{2\sqrt{1+3x}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{1+2x}} - \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$ και $f_2'(x) = 1+4x$ και υπάρχουν σε μια περιοχή του μηδενός και είναι:

$f_1'(0) = 1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ και $f_2'(0) = 1 \neq 0$.

Επί πλέον $\lim_{x\to0} f_1(x) = 1-1 = 0 = \lim_{x\to0} f_2(x) = 0$

Υπάρχουν συνεπώς οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του κανόνα και έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1'(0)}{f_2'(0)} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Πρόταση 2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2, οι οποίες είναι ορισμένες σε ένα διάστημα (α,β). Εάν ισχύει ότι:

1. Υπάρχουν οι παράγωγοι αυτών $\forall\ x\in(\alpha,\beta)$.

2. $f_2'(x) \neq 0\ \forall\ x\in(\alpha,\beta)$.

3. $\lim\limits_{x\to \alpha+0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to \alpha+0} f_2(x) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to \alpha+0} \dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lambda\in\mathbb{R}$ ή $+\infty$ ή $-\infty$ τότε:

$$\lim_{x\to \alpha+0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to \alpha+0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lambda\in\mathbb{R} \text{ ή } +\infty \text{ ή } -\infty.$$

Απόδειξη: (Βλέπετε 'Αλγεβρα 3. Κουκλάδα - Γεωργιακάκη).

Παράδειγμα 1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{συν}x-1}{x^2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1-2e^{x-1}}{(x-1)^3}$

Απάντηση: α. Θέτουμε $f_1(x) = \text{συν}x-1$ και $f_2(x) = x^2$. Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι παντού ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Οι παράγωγοι αυτών είναι αντίστοιχα:

$f_1'(x) = \text{ημ}x$ και $f_2'(x) = 2x$ και ισχύουν:

1. Υπάρχουν οι παράγωγοι αυτών $\forall x\in\mathbb{R}$.
2. $f_2'(x) \neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$

(Δηλαδή εδώ έχουμε αμφίπλευρα όρια του $x\to 0+0$ και $x\to 0-0$) και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ημ}x}{x} = -\dfrac{1}{2}$.

Επειδή λοιπόν πληρούνται οι συνθήκες του β' κανόνα του de l Hospital θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = -\frac{1}{2}$$

β. Θέτουμε $f_1(x) = x^2+1-2e^{x-1}$ και $f_2(x) = (x-1)^3$. Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι παντού ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Οι παράγωγοι αυτών είναι αντίστοιχα:

$f_1'(x) = 2x-2e^{x-1}(x-1)' = 2x-2e^{x-1}$ και

$f_2'(x) = 3(x-1)^2$ και ισχύουν.

1. Υπάρχουν οι παράγωγοι αυτών $\forall x\in\mathbb{R}$.
2. Είναι $f_2'(x) \neq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}-\{1\}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1} f_2(x)$.

4. $\lim_{x\to 1} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2e^{x-1}}{3(x-1)^2} = -\frac{1}{3}$, γιατί για τις συναρτήσεις $f_1'(x) = 2x-2e^{x-1}$ και $f_2'(x) = 3(x-1)^2$ ισχύουν και πάλι ότι και για τις f_1 και f_2 και επομένως:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f_1''(x)}{f_2''(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2-2e^{x-1}}{6(x-1)}$$

και πάλι για τις f_1'' και f_2'', οπότε τελικά:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f_1''(x)}{f_2''(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f_1'''(x)}{f_2'''(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2e^{x-1}}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Στο παράδειγμα αυτό γινόταvε συνεχής εφαρμογή του θεωρήματος, αφού κάθε φορά ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του κανόνα.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0} \frac{εφx}{x^2}$ με $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Απάντηση: Θέτουμε $f_1(x) = εφx$ και $f_2(x) = x^2$. Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι ορισμένες $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Οι παράγωγοι αυτών είναι αντίστοιχα: $f_1'(x) = \frac{1}{συν^2 x}$ και $f_2'(x) = 2x$ και ισχύουν:

1. Υπάρχουν οι παράγωγοι αυτών $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

2. Είναι $f_2'(x) \neq 0 \;\forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2})$

3. $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0 = \lim_{x\to 0} f_2(x)$

4. $\lim_{x\to 0+0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{συν^2 x}}{2} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{2xσυν^2 x} = +\infty$

Συνεπώς ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του κανόνα και επομένως: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = +\infty$.

Πρόταση 3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2, οι οποίες είναι ορισμένες σε ένα διάστημα Δ της μορφής $(α, +\infty)$.

Εάν ισχύει ότι:

1. Υπάρχουν οι παράγωγοι αυτών $\forall\, x \in Δ$.

2. $f_2'(x) \neq 0 \ \forall\ x \in \Delta$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = \pm\infty$, τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} =$
$= \lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = \pm\infty$.

Απόδειξη: Επειδή οι f_1 και f_2 ορίζονται σε ένα διάστημα της μορφής $(a,+\infty)$ μπορούμε να υποθέσουμε $a > 0$. Έστω τώρα $x = \frac{1}{y}$, τότε επειδή $x \in (a,+\infty)$ θα είναι $y \in (0, \frac{1}{a})$.

Επομένως οι συναρτήσεις $F_1(y) = f_1(\frac{1}{y})$ και $F_2(y) = F_2(\frac{1}{y})$ με $\Delta = (0, \frac{1}{a})$ πληρούν τις προϋποθέσεις της πρότασης (2), γιατί:

1. $F_1'(y) = f_1'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})$ (σύνθετη συνάρτηση)

   $F_2'(y) = f_2'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2}) \ \forall\ y \in (0, \frac{1}{a})$

2. $F_2'(y) \neq 0 \ \forall\ y \in (0, \frac{1}{a}) \Leftrightarrow f_2'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2}) \neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{y\to 0+0} F_2(y) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{y\to 0+0} F_2(y) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim\limits_{y\to 0+0} \frac{F_1'(y)}{F_2'(y)} = \lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = \pm\infty$.

Επομένως θα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{y\to 0+0} \frac{F_1(y)}{F_2(y)} = \lim_{y\to 0+0} \frac{F_1'(y)}{F_2'(y)} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ ή } \lambda = \pm\infty .$$

Παρατήρηση. Η πρόταση ισχύει και όταν οι f_1, f_2 είναι ορισμένες σ'ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ με $x \to -\infty$. Διατυπώστε και δείξετε την πρόταση.

Παράδειγμα 1. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}$ με $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Απάντηση: θέτουμε $f_1(x) = \log(1+\frac{a}{x})$ και $f_2(x) = \frac{1}{x}$. Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι ορισμένες σ'ένα διάστημα $\Delta = (0,+\infty)$. Οι παράγωγοι αυτών είναι αντίστοιχα:

$$f_1'(x) = \frac{(1+\frac{a}{x})'}{1+\frac{a}{x}} = \frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a}{x}} = \frac{-a}{x(x+a)} \quad \text{και} \quad f_2'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

και είναι $f_2'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in (0,+\infty)$.

Έχουμε λοιπόν ότι:

1. Υπάρχουν οι παράγωγοι αυτών $\forall \ x \in (0,+\infty)$
2. $f_2'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in (0,+\infty)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \log 1 = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$

$$4.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-a}{x(x+a)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 a}{x(x+a)} = a$$

Οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του κανόνα και συνεπώς: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = a$.

Παράδειγμα 2. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log(1-\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$. Εφαρμογή του προηγούμενου για $a = -1$.

Απάντηση: θέτουμε $f_1(x) = \log(1-\frac{1}{x})$ και $f_2(x) = \frac{1}{x}$ και οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι παντού ορισμένες σ'ένα διάστημα $\Delta = (1,+\infty)$.

Οι παράγωγοι αυτών είναι αντίστοιχα:

$$f_1'(x) = \frac{(1-\frac{1}{x})'}{1-\frac{1}{x}} = \frac{(-\frac{1}{x})'}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x(x-1)} \quad \text{και}$$

$$f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Ισχύουν τα παρακάτω:

1. Υπάρχουν οι παράγωγοι αυτών $\forall \ x \in \Delta$.
2. $f_2'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \Delta$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\log(1-\frac{1}{x}) = \log 1 = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2'(x)$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x(x-1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x} = -1.$

Υπάρχουν όλες οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του κανόνα, και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = -1.$$

Πρόταση 4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_1 και f_2 οι οποίες είναι ορισμένες σ'ένα διάστημα Δ της μορφής (α,ξ) ή (ξ,β) ή $(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$ και ισχύει:

1. Οι f_1 και f_2 παραγωγίζονται $\forall\, x\in\Delta$.

2. $f_2'(x)\neq 0\ \forall\, x\in\Delta$.

3. $\lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f_2(x) = +\infty$

4. $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lambda\in\mathbb{R}$ ή $\lambda = \pm\infty$ τότε:

$\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lambda\in\mathbb{R}$ (ή $\pm\infty$).

Απόδειξη: Παραλείπεται.

Παράδειγμα. Εάν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_+^*$, βρείτε το: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\alpha+\beta e^x)}{\sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}}$

Απάντηση: Επειδή, αν $f_1(x) = \ln(\alpha+\beta e^x)$ και $f_2(x) = \sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}$, θα είναι $f_1'(x) = \frac{(\alpha+\beta e^x)'}{\alpha+\beta e^x} = \frac{\beta e^x}{\alpha+\beta e^x}$ και

$f_2'(x) = \frac{\beta x+\alpha}{\sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}}$ εφαρμόζοντας τον κανόνα παίρνουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta e^x\sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}}{(\alpha+\beta e^x)(\alpha+\beta x)} = \beta\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\alpha+\beta e^x}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\beta x^2+2\alpha x+\gamma}}{\alpha+\beta x} = \beta\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(\alpha+\beta e^x)'}\cdot\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\beta+\frac{2\alpha}{x}+\frac{\gamma}{x}}}{\frac{\alpha}{x}+\beta}$$

$$= \beta\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\beta e^x}\cdot\frac{\sqrt{\beta}}{\beta} = \beta\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\sqrt{\beta}}{\beta} = \frac{\sqrt{\beta}}{\beta}\,.$$

5.19. Ειδικές περιπτώσεις αοριστίας της μορφής $0^0, +\infty^0, 1^{\pm\infty}$

Γνωρίζουμε, ότι αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε μια περιοχή του σημείου ξ και είναι $f(x)>0$ για κάθε x της περιο-

χής αυτής και επί πλέον υπάρχουν τα $\lim_{\xi} f(x)$ και $\lim_{\xi} \varphi(x)$, τότε ισχύει: $\lim_{x\to\xi}[f(x)^{\varphi(x)}] = \lim_{x\to\xi} f(x)^{\lim_{x\to\xi}\varphi(x)}$

Αλλά αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to\xi}\varphi(x) = 0$ οδηγούμαστε στην μορφή 0^0, η οποία δεν έχει νόημα αριθμού.

Όμοια αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to\xi}\varphi(x) = +\infty$ ή $-\infty$ επίσης οδηγούμαστε στην μορφή $1^{+\infty}$ ή $1^{-\infty}$ που και πάλι δεν έχει νόημα αριθμού.

Για να άρουμε την αοριστία στις περιπτώσεις αυτές εργαζόμαστε ως εξής:

α. Αοριστία της μορφής 0^0.

Έστω ότι $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ με $f(x) > 0\ \forall\ x \in \pi(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ καθώς και $\lim_{x\to\xi}\varphi(x) = 0$.

Έχουμε: $\ln y = \varphi(x)\ln f(x) \rightarrow \ln y = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$

και επομένως: $\lim_{x\to\xi}[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x\to\xi}\varphi(x)\ln f(x)}$ (αφού η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής).

Ώστε αρκεί να βρούμε το $\lim_{x\to\xi}\varphi(x)\ln f(x)$.

Έχουμε όμως ότι $\lim_{x\to\xi}\varphi(x) = 0$ και $\lim_{x\to\xi}\ln f(x) = -\infty$, γιατί, αφού $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$, έπεται, ότι το $f(x)$ τείνει στο μηδέν από τιμές θετικές, οπότε λόγω της συνέχειας της λογαριθμικής συνάρτησης θα έχουμε:

$\lim_{x\to\xi}\ln f(x) = \ln(\lim_{x\to\xi} f(x)] = -\infty$.

Με αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε σε αοριστία γνωστή της μορφής $0(-\infty)$.

Παράδειγμα. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0+0}(\eta\mu x)^x$.

Απάντηση: Εδώ $f(x) = \eta\mu x$ και $\varphi(x) = x$ και είναι $\lim_{x\to 0+0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0+0}\varphi(x) = 0$ και επομένως έχουμε αοριστία της μορφής 0^0. Μετά από αυτό θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+0}(\eta\mu x)^x = e^{\lim_{x\to 0+0}(x\ln\eta\mu x)}$$

Επειδή το $\lim_{x\to 0+0}(x\ln\eta\mu x)$ είναι της μορφής $0(-\infty)$ θα εργαστούμε ως εξής:

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0+0}(x\ln\etaμx) = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\etaμx}{\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{-\ln\etaμx}{\frac{1}{x}}$

((μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)) άρα:

$$\lim_{x\to 0+0}(x\ \ln\etaμx) = -\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{-(\etaμx)'}{\etaμx}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2}{εφx} = -\lim_{x\to 0+0}\frac{(x^2)'}{(εφx)'}$$

(γιατί είναι της μορφής: $\frac{0}{0}$) $= -\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{2x}{\frac{1}{συν^2x}} = -\lim\limits_{x\to 0+0}(2xσυν^2x)=0$

Επομένως και $\lim\limits_{x\to 0+0}(\etaμx)^x = e^0 = 1$.

β. Αοριστία της μορφής $+\infty^0$.

'Εστω ότι $y = [f(x)]^{φ(x)}$ με $f(x) > 0\ \forall\ x\in π(ξ)$ και $\lim\limits_{x\to ξ}f(x) = +\infty$ καθώς και $\lim\limits_{x\to ξ}φ(x) = 0$, οπότε έχουμε αοριστία της μορφής $+\infty^0$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to ξ}y = \lim\limits_{x\to ξ}[f(x)]^{φ(x)} = e^{\lim\limits_{x\to ξ}φ(x).\ln f(x)}$

οπότε αρκεί να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to ξ}φ(x)\ln f(x)$, που είναι της μορφής $0(+\infty)$.

Παράδειγμα. Βρείτε το $\lim(x^{\frac{1}{x}})$.

Απάντηση: Προφανώς είναι της μορφής $(+\infty^0)$. Επομένως θα έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}$ και αρκεί να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x$ το οποίο προφανώς είναι της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ και άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

γ) Αοριστία της μορφής $1^{+\infty}$ ή $1^{-\infty}$.

Εάν $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ με $f(x) > 0$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = 1$, ενώ $\lim_{x\to\xi}\varphi(x) = +\infty$, τότε έχουμε αοριστία της μορφής $1^{+\infty}$ και τότε εργαζόμενοι όπως προηγουμένως έχουμε ότι:

$\lim_{x\to\xi} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x\to\xi}\varphi(x)\ln f(x)}$ και επομένως αρκεί να βρούμε το $\lim_{x\to\xi}\varphi(x)\ln f(x)$, που είναι της μορφής $0(+\infty)$. Ίδια εργασία αν είναι της μορφής $1^{-\infty}$.

Παράδειγμα. Βρείτε το $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

Απάντηση: Είναι φανερό, ότι αν $x \to 1+0$, τότε έχουμε αοριστία της μορφής $1^{+\infty}$ και αν $x \to 1-0$ αοριστία της μορφής $1^{-\infty}$.

Θα έχουμε: $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\ln x}$ και επομένως αρκεί να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$, που προφανώς είναι της μορφής: $\frac{0}{0}$.

Τότε όμως θα έχουμε: $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} =$

$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$, άρα και $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

δ) Αοριστία της μορφής $0(\pm\infty)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f = f_1 f_2$ και ζητάμε το $\lim_{x\to\xi} f = \lim_{x\to\xi}(f_1 f_2)$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to\xi}(f_1 f_2) = \lim_{x\to\xi} f_1 \cdot \lim_{x\to\xi} f_2$. Εάν όμως $\lim_{x\to\xi} f_1 = 0$ και $\lim_{x\to\xi} f_2(x) = +\infty$ ή $-\infty$ (όπως είδαμε στην θεωρία συγκλίσεως), τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον παραπάνω κανόνα επειδή το $0(\pm\infty)$ δεν έχει νόημα αριθμού. Γνωρίζουμε όμως ότι αν η f_2 είναι ορισμένη σε μια περιοχή του σημείου ξ, τότε υπάρχει μια περιοχή του ξ η οποία περιέχεται στην πρώτη και ισχύει $f_2(x) \neq 0$ $\forall$ x της περιοχής αυτής. Αυτό όμως μας επιτρέπει να γράψουμε το γινόμενο $f_1 f_2$ υπό την μορφή

$$f_1 f_2 = \frac{f_1}{\frac{1}{f_2}}.$$

Επειδή όμως του $x \to \xi$ το $\lim_{x\to\xi} f_2 = \pm\infty$, θα έχουμε $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{f_2} = 0$

και επομένως οδηγούμαστε στην μορφή της αοριστίας του τύπου $\frac{0}{0}$.

Εννοείται ότι για την εφαρμογή του κανόνα άρσης αοριστίας της μορφής $\frac{0}{0}$, θα πρέπει να ισχύουν και για τις συναρτήσεις f_1 και $\frac{1}{f_2}$, οι προϋποθέσεις εκείνες οι οποίες επιτρέπουν την εφαρμογή του κανόνα αυτού.

Παράδειγμα. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}(x\sigma\varphi x)$.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0+}\sigma\varphi(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0-}\sigma\varphi x = -\infty$ και επομένως έχουμε αοριστία των μορφών $0(+\infty)$ ή $0(-\infty)$.

Επειδή $\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x}$ $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$ θα έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}(x\sigma\varphi x) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x}$ και μ'αυτόν τον τρόπο έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

Αλλά για τις συναρτήσεις $f_1(x) = x$ και $f_2(x) = \varepsilon\varphi x$ ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του κανόνα αοριστίας του τύπο $\frac{0}{0}$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, οπότε και

$\lim\limits_{x\to 0}(x\sigma\varphi x) = 1$.

Παρατήρηση: Είναι δυνατό θέτοντας f_1 το $\frac{1}{f_1}$ να αναχθούμε στην μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Παράδειγμα. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0+}(\sqrt{x}\ln x)$.

Απάντηση: Προφανώς έχουμε αοριστία της μορφής $0(-\infty)$. Γράφουμε το γινόμενο $\sqrt{x}\ln x$ υπό την μορφή:

$\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ και θα έχουμε τώρα αοριστία της μορφής $\frac{-\infty}{+\infty} = -\frac{+\infty}{+\infty}$,

οπότε εφαρμόζουμε τα γνωστά δηλαδή:

$$\lim_{x\to 0+0}(\sqrt{x}\ln x) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = -\lim_{x\to 0+0}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = -\lim_{x\to 0+0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0+0} 2\sqrt{x} = 0.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ De l' Hospital

1. Για να βρούμε το όριο κάποιας συνάρτησης f του $x\to\xi$ (x τείνοντας στο ξ) βάζουμε στον τύπο της f όπου x το ξ και αν η f παίρνει κάποια από τις μορφές $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ τότε κάνουμε χρήση της πρότασης De l' Hospital

Δηλαδή: $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}\frac{\varphi(x)}{g(x)} \overset{\frac{0}{0},\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=} \lim_{x\to\xi}\frac{\varphi'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to\xi}\frac{\varphi^{(\nu)}(x)}{g^{(\nu)}(x)} =$
$= c.$

2. Αν του $x\to\xi$ η f παίρνει τη μορφή $0(\pm\infty)$ τότε για να βρούμε το όριο της την γράφουμε η με την μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Δηλαδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}\varphi(x)g(x) = \lim_{x\to\xi}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to\xi}\frac{g(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$

και εφαρμόζουμε την παραπάνω πρόταση 1 της μεθόδου.

3. Αν του $x\to\xi$ η f παίρνει κάποια από τις μορφές $0^0, 1^\infty, \infty^0$ τότε γράφουμε την f με εκθετική μορφή οπότε παρουσιάζεται στον εκθέτη η απροσδιοριστία $0(\pm\infty)$ και εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση 2 της μεθόδου.

Δηλαδή: $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}[\varphi(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\ln\varphi(x)} =$

$= e^{\lim g(x)\ln\varphi(x)} = e^{\lim\frac{\ln\varphi(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\lim\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln\varphi(x)}}} = \ldots$

4. Αν του $x\to\xi$ η f παίρνει τη μορφή $(\infty-\infty)$ τότε ή κάνουμε τις πράξεις στον τύπο της f και τις δίνουμε μια από τις μορφές $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή $0(\pm\infty)$ ή βγάζουμε κοινό παράγοντα κάποια από τις συναρτήσεις φ(x) ή g(x) οπότε ή υπολογίζεται το όριο, ή παίρνει τη μορφή $0(\pm\infty)$ οπότε εργαζόμασ-

τε όπως στην περίπτωση 2 της μεθόδου.

Δηλαδή: $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}[\varphi(x)-g(x)] = \lim_{x\to\xi}\varphi(x)\left[1-\frac{g(x)}{\varphi(x)}\right]=\dots$

Τα παραπάνω ισχύουν και για τα όρια ακολουθιών παρ' όλο που οι ακολουθίες δεν είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Αλλά αφού πρώτα τις μετατρέψουμε σε συναρτήσεις θέτοντας όπου ν το x.

Βρίσκουμε έτσι το όριο της αντίστοιχης συνάρτησης $\alpha_{(x)} = f(x)$ του $x\to+\infty$ οπότε και ο περιορισμός της f που είναι η ακολουθία (α_ν) $\nu\in\mathbb{N}$ έχει το ίδιο όριο (βάσει γνωστής πρότασης από τα όρια).

Για την εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου πρέπει η συνάρτηση να παίρνει κάποια από τις απροσδιόριστες μορφές

$\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0(\pm\infty)$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Τα θέματα που ακολουθούν θα κάνουν περισσότερο κατανοητή τη μέθοδο.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Να υπολογιστούν τα όρια

i) $\lim_{x\to0}\frac{\alpha^x-1}{x}$, $0<\alpha\neq1$ iii) $\lim_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu(xe^x)-\sigma\upsilon\nu(xe^{-x})}{x^2}$

ii) $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\sigma\upsilon\nu x}{x}$ iv) $\lim_{x\to0}\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$

Λύση: i) Αν θέσουμε όπου x το 0 το ζητούμενο όριο γίνεται $\frac{0}{0}$. Επομένως θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο De l' Hospital

Είναι: $\lim_{x\to0}\frac{\alpha^x-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{(\alpha^x-1)'}{x'} = \lim_{x\to0}\frac{\alpha^x\ln\alpha}{1} = \ln\alpha$

Σημείωση: Αν $\alpha = e$ τότε $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \ln e = 1$.

ii) Όμοια αν θέσουμε όπου x το 0 παρουσιάζεται η απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ άρα εφαρμόζεται η μέθοδος De l' Hospital

Είναι: $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{(e^{x^2}-\sigma\upsilon\nu x)'}{x'} = \lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}(x^2)'+\eta\mu x}{1} =$

$= \lim_{x\to0}\frac{2e^{x}x+\eta\mu x}{1} = 0.$

iii) Με $x = 0$ έχουμε την μορφή $\frac{0}{0}$ άρα έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu(xe^{x})-\sigma\upsilon\nu(xe^{-x})}{x^{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{[\sigma\upsilon\nu(xe^{x})-\sigma\upsilon\nu(xe^{-x})]'}{(x^{2})'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu(xe^{x})(xe^{x})'+\eta\mu(xe^{-x})(xe^{-x})'}{2x} \quad (\alpha)$$

Αν στην (α) θέσουμε όπου x στο 0 έχουμε την μορφή $\frac{0}{0}$.

'Αρα είναι: $\lim_{x\to 0}\frac{[-\eta\mu(xe^{x})(xe^{x})'+\eta\mu(xe^{-x})(xe^{-x})']'}{(2x)'} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[-\eta\mu(xe^{x})(e^{x}+xe^{x})+\eta\mu(xe^{-x})(e^{-x}-xe^{-x})]'}{2} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sigma\upsilon\nu(xe^{x})(xe^{x})'(e^{x}+xe^{x})-\eta\mu(xe^{x})(e^{x}+e^{x}+xe^{x})+}{2}$$

$$\frac{+\sigma\upsilon\nu(xe^{-x})(xe^{-x})'(-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x})+\eta\mu(xe^{-x})(-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x})}{2} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sigma\upsilon\nu(xe^{x})(e^{x}+xe^{x})^{2}-\eta\mu(xe^{x})(2e^{x}+xe^{x})+}{2}$$

$$\frac{+\sigma\upsilon\nu(xe^{-x})(e^{-x}-xe^{-x})(2e^{x}+xe^{x})+\eta\mu xe^{-x}(-2e^{-x}+xe^{-x})}{2} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2}$$

iv) Με $x = 0$ έχουμε την απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ άρα έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{(xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x})'}{(e^{x}-1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(xe^{2x})'+(xe^{x})'-(2e^{2x})'+(2e^{x})'}{e^{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+2xe^{2x}+e^{x}+xe^{x}-4e^{2x}+2e^{x}}{e^{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Θέμα 2. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{4x}, & x \le 0 \\ \eta\mu 3x+\beta\sigma\upsilon\nu 2x, & x > 0 \end{cases}$$

Να προσδιοριστούν τα πραγματικά α,β έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο R.

Λύση: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R θα είναι συνεχής σ' αυτό επομένως και στο μηδέν και παραγωγίσιμη στο μηδέν.

'Αρα έχουμε:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ και

ii) $f'(0^+) = f'(0^-)$

Η (i) γίνεται: $\lim\limits_{x\to 0^+}(ημ3x+βσυν2x) = \lim\limits_{x\to 0^-} αe^{4x} = α \leftrightarrow β = α$ (1)

Η (ii) δίνει τις σχέσεις:

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{ημ3x+βσυν2x-α}{x} \quad (\text{μορφή } \frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(ημ3x)'+(βσυν2x)'}{1} = \lim_{x\to 0}(3συν3x-2βημ2x) = 3 \quad (2)$$

και $f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{αe^{4x}-α}{x}$ (μορφή $\frac{0}{0}$) $= \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(αe^{4x}-α)'}{1} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} 4αe^{4x} = 4α$ (3)

Επομένως είναι $4α = 3$ (4).

Από τις (1) και (4) έχουμε $α = \frac{3}{4}$ και $β = \frac{3}{4}$.

Θέμα 3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{e^{(λ-1)x}-e^x-x}{x^2}$

Για ποιά τιμή του λ είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = c \in \mathbb{R}$.

Λύση: Αν στον τύπο της f θέσουμε όπου x το 0 έχουμε την μορφή $\frac{0}{0}$ οπότε μέθοδος De l' Hospital

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(λ-1)e^{(λ-1)x}-e^x-1}{2x} = \dfrac{λ-1-2}{0}$

όπου αν $λ-1-2 \neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ (άτοπο) γιατί τότε το όριο δεν θα ήταν πεπερασμένο.

'Αρα πρέπει $λ-3 = 0 \rightarrow λ = 3$.

Σημείωση: Με $λ = 3$ είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x-x}{x^2} \overset{(\frac{0}{0})}{=}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x-1}{2x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^x}{2} = \frac{3}{2}$$

Θέμα 4. Αν $α+β+γ = 0$ και $να+μβ = 0$, $μ,ν \in \mathbb{N}^*$

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{αx^ν+βx^μ+γ}{(x-1)^2}$

Λύση: Αν θέσουμε όπου x το 1 το ζητούμενο όριο παίρνει την μορφή $\frac{0}{0}$ άρα από τη μέθοδο De l'Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^{\nu}+\beta x^{\mu}+\gamma}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(\alpha x^{\nu})'+(\beta x^{\mu})'}{[(x-1)^2]'}=\lim_{x\to 1}\frac{\nu\alpha x^{\nu-1}+\mu\beta x^{\mu-1}}{2(x-1)}$$

Αλλά αν θέσουμε και πάλι όπου x το 1 το νέο όριο παίρνει τη μορφή $\frac{0}{0}$ οπότε εφαρμόζουμε και πάλι την μέθοδο De l' Hospital και έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\nu\alpha x^{\nu-1}+\mu\beta x^{\mu-1}}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\nu(\nu-1)\alpha x^{\nu-2}+\mu(\mu-1)\beta x^{\mu-2}}{2}=$$

$$=\frac{\nu(\nu-1)\alpha+\mu(\mu-1)\beta}{2}$$

Θέμα 5. Να προσδιοριστεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ με

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu\alpha(x-1)}{x(x-1)}, & x<1\\ 2\alpha x^2-2x+1, & x\geq 1\end{cases}$$

να υπάρχει

Λύση: Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο 1 και να είναι ίσα.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2\alpha x^2-2x+1)=2\alpha-1 \quad (1)$

και $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\eta\mu\alpha(x-1)}{x(x-1)}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[\eta\mu\alpha(x-1)]'}{[x(x-1)]'}=$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha(x-1)[\alpha(x-1)]'}{2x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha(x-1)}{2x-1}=\frac{\alpha}{1}\quad(2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε: $2\alpha-1=\alpha \Leftrightarrow \alpha=1$

Θέμα 7. Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+e^{-x})}{x}$ iii) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{\lambda^{\nu}+\nu}{\lambda^{\nu+1}+\nu+1}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\eta\mu(4x))}{\ln(\eta\mu(3x))}$ iv) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{4\nu^3-2\nu^2+3\nu-1}{(\nu+1)^3}$

Λύση: i) Αν θέσουμε όπου x το ∞ το ζητούμενο όριο παίρνει τη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο De l Hospital.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+e^{-x})}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{e^x+e^{-x}}(e^x+e^{-x})'}{1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^x+e^{-x}}(e^x-e^{-x})}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1$$

ii) Αν θέσουμε όπου x το μηδέν έχουμε την απροσδιοριστία $\frac{-\infty}{-\infty}$. Άρα έχει εφαρμογή η μέθοδος De l' Hospital.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\eta\mu 4x)}{\ln(\eta\mu 3x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln(\eta\mu 4x)]'}{[\ln(\eta\mu 3x)]'} =$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\eta\mu 4x}\,\sigma\upsilon\nu(4x)4}{\frac{1}{\eta\mu 3x}\,\sigma\upsilon\nu(3x)3} = \frac{4}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu 3x\sigma\upsilon\nu 4x}{\eta\mu 4x\sigma\upsilon\nu 3x} =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 4x}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{\sigma\upsilon\nu 3x} = \frac{4}{3}\,1\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 4x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \frac{4}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sigma\upsilon\nu 3x}{4\sigma\upsilon\nu 4x} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4} = 1$$

iii) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\lambda^x + x}{\lambda^{x+1}+x+1}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

α) Αν $|\lambda| > 1$ τότε αν θέσουμε όπου x το $+\infty$ η f παίρνει την μορφή $\frac{\infty}{\infty}$. Άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\lambda^x\ln\lambda+1}{\lambda^{x+1}\ln\lambda+1} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2\lambda\lambda^x}{\ln^2\lambda\lambda^{x+1}} = \frac{1}{\lambda}$$

Άρα είναι τότε και $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\lambda^\nu+\nu}{\lambda^{\nu+1}+\nu+1} = \frac{1}{\lambda}$

β) Αν $|\lambda| < 1$ τότε και πάλι αν θέσουμε όπου x το $+\infty$ έχουμε την απροσδιοριστία $\frac{\infty}{\infty}$ οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lambda^x+x}{\lambda^{x+1}+x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\lambda^x\ln\lambda+1}{\lambda^{x+1}\ln\lambda+1} = 1$$

Άρα τότε είναι και $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{\lambda^\nu+\nu}{\lambda^{\nu+1}+\nu+1} = 1$

γ) Αν $|\lambda| = 1$ τότε θέτοντας όπου x το ∞ η f παίρνει και πάλι τη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Άρα το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lambda^x+x}{\lambda^{x+1}+x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\pm 1}{x+1\pm 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x\pm 1)'}{(x+1\pm(1))'} = 1$$

Οπότε είναι και $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{\lambda^\nu+\nu}{\lambda^{\nu+1}+\nu+1} = 1$

Επομένως το όριο της ακολουθίας που είναι ο περιορισμός της

f είναι:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\lambda^{\nu}+\nu}{\lambda^{\nu+1}+\nu+1} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & |\lambda|>1 \\ 1, & |\lambda|\le 1 \end{cases}$$

iv) θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{4x^3-2x^2+3x-1}{(x+1)^3}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Αν στην f θέσουμε όπου x το $+\infty$ έχουμε την αοριστία $\frac{+\infty}{+\infty}$

Άρα μέθοδος De l Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{12x^2-4x+3}{3(x-1)^2} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{24x-4}{6(x-1)} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{24}{6} = 4$$

Άρα και η ακολουθία που είναι ο περιορισμός της f έχει όριο το 4.

Είναι δηλαδή: $\lim_{\nu\to\infty} \frac{4\nu^3-2\nu^2+3\nu-1}{(\nu+1)^3} = 4.$

Θέμα 8. Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\sigma\varphi x}$ iii) $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln\ln(\frac{x}{2}+1)}{\ln x}$

ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\nu}}{e^{\alpha x}}$, $\nu\in\mathbb{N}$, $\alpha>0$ iv) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+e^{x}}{xe^{\frac{x}{4}}}$

Λύση: i) Το ζητούμενο όριο είναι της μορφής $\frac{-\infty}{+\infty}$.

Άρα έχει εφαρμογή η μέθοδος De l' Hospital.

Έχουμε: $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\sigma\varphi x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\eta\mu^2 x}} = -\lim_{x\to0^+} \frac{\eta\mu^2 x}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1} = 0$

ii) Έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$

Άρα έχουμε μέθοδος De l' Hospital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\nu}}{e^{\alpha x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\nu x^{\nu-1}}{\alpha e^{\alpha x}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\nu(\nu-1)x^{\nu-2}}{\alpha^2 e^{\alpha x}} = \dots =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\dots2.1}{\alpha^{\nu} e^{\alpha x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\nu!}{\alpha^{\nu} e^{\alpha x}} = 0$$

iii) Έχουμε την απροσδιοριστία $\frac{-\infty}{-\infty}$ άρα είναι:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln\ln(\frac{x}{2}+1)}{\ln x} = \lim_{x\to0^+} \frac{[\ln\ln(\frac{x}{2}+1)]'}{(\ln x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\ln(\frac{x}{2}+1)}[\ln(\frac{x}{2}+1)]'}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\ln(\frac{x}{2}+1)}\cdot\frac{1}{\frac{x}{2}+1}(\frac{x}{2}+1)'}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln(\frac{x}{2}+1)(\frac{x}{2}+1)} =$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{2}[\ln(\frac{x}{2}+1)+1]} = 1$$

4) Αν στον τύπο της f θέσουμε όπου x το $+\infty$ έχουμε την απροσδιοριστία $\frac{\infty}{\infty}$ επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+e^x}{xe^{\frac{x}{4}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+e^x)'}{(xe^{\frac{x}{4}})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+e^x}{e^{\frac{x}{4}}+\frac{1}{4}xe^{\frac{x}{4}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}+\frac{1}{16}xe^{\frac{x}{4}}+\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{3x}{4}}}{\frac{1}{2}+\frac{x}{16}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}e^{\frac{3x}{4}}}{\frac{1}{16}} = +\infty$$

Θέμα 9. Να υπολογιστούν τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3\ln x$ iii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\,\eta\mu\frac{1}{x}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x\ln x)$

Λύση: i) Αν θέσουμε όπου x το 0 το ζητούμενο όριο παίρνει τη μορφή $0(-\infty)$. Επομένως εφαρμόζουμε τη μέθοδο De l' Hospital και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}x^3\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{3} = 0$$

ii) Όμοια έχουμε τη μορφή $\infty(0)$ οπότε εφαρμόζοιμε τον De l' Hospital και είναι:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\,\eta\mu\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}(\frac{1}{x})'}{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = +2\lim_{x\to\infty}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

$\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{x^2} = 2.1\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

iii) Έχουμε τη μορφή $0(-\infty)$ οπότε:

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = -2\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} = -2\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}} = 0$$

iv) Έχουμε την μορφή $0(-\infty)$ άρα είναι:

$$\lim_{x\to0^+}(\eta\mu x\ln x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\eta\mu x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}} = -\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu^2 x}{x\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= -\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1.0 = 0$$

Θέμα 10. Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\varepsilon\varphi x$ **iii)** $\lim\limits_{\nu\to\infty}\nu^2 e^{-\nu^2}$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\nu}e^{-x}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to\alpha}(\alpha^2-x^2)\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2\alpha}$

Λύση: i) Είναι η μορφή $0(\pm\infty)$ οπότε μέθοδος 2

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\varepsilon\varphi x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{-\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\varepsilon\varphi^2 x}} =$

$= +2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\varepsilon\varphi^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x = 2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x = 2.$

ii) Είναι η μορφή $\infty(0)$ οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty}x^{\nu}e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\nu}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\nu x^{\nu-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\nu(\nu-1)x^{\nu-2}}{e^x} = \dots =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\nu!}{e^x} = 0$$

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^2e^{-x^2}$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Αν υπολογίσουμε το όριο της f τότε και η ακολουθία θα έχει το ίδιο όριο επειδή είναι ο περιορισμός της f.

Η f είναι της μορφής $\infty(0)$ οπότε είναι:

$$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{x^2}2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2e^{x^2}} = 0$$

Άρα και $\lim\limits_{\nu\to\infty}\nu^2e^{-\nu^2} = 0.$

iv) Αν θέσουμε όπου x το α η f παίρνει τη μορφή $0(\pm\infty)$.

Άρα έχουμε: $\lim\limits_{x\to a}(a^2-x^2)\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2a}}} \overset{(\frac{0}{0})}{=\!=}$

$$= \lim_{x\to a}\frac{-2x}{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi x}{2a}\cdot\varepsilon\varphi^2\frac{\pi x}{2a}}\cdot\frac{\pi}{2a}} = \lim_{x\to a}\frac{4xa\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi x}{2a}\cdot\varepsilon\varphi^2\frac{\pi x}{2a}}{\pi} =$$

$$= \frac{4a}{\pi}\lim_{x\to a}x\eta\mu^2\frac{\pi x}{2a} = \frac{4a^2}{\pi}.$$

Θέμα 11. Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}$ ii) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)\right]$

Λύση: i) Είναι της μορφής $0(\pm\infty)$. Άρα μέθοδος De l' Hospital έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}}} \overset{(\frac{0}{0})}{=\!=} \lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{\left[\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}}\right]'} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2\varepsilon\varphi^2\frac{\pi x}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi x}{2}}{\pi} = \lim_{x\to 1}\frac{2\eta\mu^2\frac{\pi x}{2}}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

ii) Είναι η αοριστία της μορφής $\infty(0)$ οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{(\frac{0}{0})}{=\!=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)}\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)\right]'}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{\pi}{x^2}}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)} =$$

$$= \pi\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)} = \pi\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 1} = 2\pi.$$

Θέμα 12. Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x\eta\mu x)^{\eta\mu^2 x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x)^{\eta\mu x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$ iv) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{2}{\nu+1}}$

Λύση: i) Έχουμε απροσδιοριστία της μορφής (0^0). Επομένως, είναι $\lim_{x\to 0}(x\eta\mu x)^{\eta\mu^2 x} = \lim_{x\to 0} e^{\eta\mu^2 x\ln(x\eta\mu x)} =$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\eta\mu^2 x\ln(x\eta\mu x)} \qquad (1)$$

και στον εκθέτη έχουμε αοριστία της μορφής $0(-\infty)$.
Άρα έχουμε από την (1)

$$\lim_{x\to 0}\eta\mu^2 x\ln(x\eta\mu x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x\eta\mu x)}{\frac{1}{\eta\mu^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x\eta\mu x}(x\eta\mu x)'}{\frac{-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^4 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu^4 x}{-2x\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^3 x + x\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x}{x\sigma\upsilon\nu x} =$$

$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^3 x}{x^3}\frac{x^2}{\sigma\upsilon\nu x} + \lim_{x\to 0}\eta\mu^2 x = 0$. Άρα το ζητούμενο όριο είναι $e^0 = 1$ από την (1).

ii) Είναι η μορφή (0^0). Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}x^x = \lim_{x\to 0}e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0}x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= e^{-\lim_{x\to 0}x} = e^0 = 1.$$

iii) Είναι η μορφή (0^0). Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}(\eta\mu x)^{\eta\mu x} = \lim_{x\to 0}e^{\eta\mu x\ln(\eta\mu x)} = e^{\lim_{x\to 0}\eta\mu x\ln(\eta\mu x)} \qquad (1)$$

όπου στον εκθέτη έχουμε αοριστία της μορφής $0(-\infty)$ οπότε ο εκθέτης γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\eta\mu x\ln(\eta\mu x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\eta\mu x)}{\frac{1}{\eta\mu x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\eta\mu x}(\eta\mu x)'}{\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = 0.$$

Και η (1) δίνει $\lim_{x\to 0}(\eta\mu x)^{\eta\mu x} = e^0 = 1$.

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{x+1}}$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Η f για $x \to +\infty$ έχει την αοριστία (0^0) οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2}{x+1}\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln\frac{1}{x}}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'}{1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2}} = e^0 = 1.$$

Επομένως και η ακολουθία έχει το ίδιο όριο επειδή είναι ο περιορισμός της f.

Θέμα 13. Να υπολογιστούν τα όρια (μορφή 1^∞)

i) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{x}}$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})^x$ iv) $\lim\limits_{\nu\to\infty}(1-\frac{1}{\nu})^\nu$

Λύση: i) Είναι $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}} = e^2 = e.$$

ii) Είναι $\lim(1-\frac{1}{x^2})^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1-\frac{1}{x^2})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x}}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1\ x\to\infty}{1-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\,\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1$$

iii) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)}{1}} = e^1 = e$$

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = (1-\frac{1}{x})^x$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και με $x\to+\infty$ έχει την μορφή (1^∞) επομένως είναι

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1-\frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Άρα και η ακολουθία που είναι ο περιορισμός της f έχει το ίδιο όριο. Δηλαδή είναι $\lim\limits_{v\to\infty}(1-\frac{1}{v})^v = \frac{1}{e}$

Θέμα 14. Να υπολογίσετε τα όρια (μορφή $(\pm\infty^0)$)

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\frac{1}{x})^{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1})^{\frac{1}{x}}$

iv) $\lim\limits_{v\to\infty}(v^2-3v+1)^{\frac{1}{v}}$

(Πανελλαδικές 1985)

Λύση: i) Είναι $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\frac{1}{x})^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(\ln\frac{1}{x})}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\ln\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln x}} = e^0 = 1$

iii) Είναι $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1})^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(\frac{x^2+1}{x+1})}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{x^2+1}{x+1})}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}(\frac{x^2+1}{x+1})'}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}\cdot\frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)}} = e^0 = 1$

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = (x^2-3x+1)^{\frac{1}{x}}$ η f με $x\to+\infty$ παίρνει τη μορφή (∞^0) οπότε είναι

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x^2-3x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-3x+1)}{x}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x^2-3x+1}} = e^0 = 1$$

Άρα και η ακολουθία $a_\nu = (\nu^2-3\nu+1)^{\frac{1}{\nu}}$ που είναι ο περιορισμός της f έχει το ίδιο όριο. Δηλαδή είναι

$$\lim_{\nu\to\infty}(\nu^2-3\nu+1)^{\frac{1}{\nu}} = 1$$

Θέμα 15. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{4x}, & x>0 \\ x^2-4ax+2-a^2, & x\le 0 \end{cases}$$

Αν υπάρχει το όριο της f στο μηδέν να προσδιορίσετε το α.

Λύση: Επειδή η f έχει όριο στο 0 ισχύει $\lim\limits_{x\to0^+}f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ (1)

Το πρώτο μέλος της (1) με $x\to0$ είναι της μορφής $(\infty)^0$.

Άρα είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x) = e^{\lim\limits_{x\to0^+}4x\ln(\ln\frac{1}{x})} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{4x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{4x}{\ln(\frac{1}{x})}} = e^0 = 1 \quad (2)$$

και $\lim\limits_{x\to0^-}f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(x^2-4ax+2-a^2) = 2-a^2$ (3)

Από τις (2) και (3) έχουμε: $2-a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm1$

Θέμα 16. Να βρεθούν τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+\beta^{\frac{1}{x}}}{2}\right]^x$, $a,\beta\in R_+^*$ **ii)** $\lim\limits_{x\to0^+}(\sigma\varphi x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Λύση: i) Τα όρια των μορφών $1^\infty, 0^0, \infty^0$ μπορούμε να τα υπολογίσουμε και με ένα άλλο τρόπο παίρνοντας τους λογάριθμους των δύο μελών της f.

Το ζητούμενο όριο είναι της μορφής (1^∞) οπότε αν θέσουμε

$$y = \left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+\beta^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \rightarrow \ln y = x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+\beta^{\frac{1}{x}}}{2}\right) \rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln y =$$

$$= \lim_{x\to\infty}x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+\beta^{\frac{1}{x}}}{2} \overset{(\infty\cdot 0)}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+\beta^{\frac{1}{x}}}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{a^{\frac{1}{x}}+\beta^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{(a^{\frac{1}{x}}+\beta^{\frac{1}{x}})'}{2}}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\alpha^{\frac{1}{x}}\ln\alpha+\beta^{\frac{1}{x}}\ln\beta)(\frac{1}{x})'}{(\alpha^{\frac{1}{x}}+\beta^{\frac{1}{x}})(\frac{1}{x})'} = \frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2} = \ln\sqrt{\alpha\beta}$$

Άρα είναι $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y = \ln\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow \ln\lim\limits_{x\to\infty} y = \ln\sqrt{\alpha\beta}$ (γιατί η συνάρτηση ln είναι συνεχής). Επομένως με απολογαρίθμιση έχουμε: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \sqrt{\alpha\beta}$.

ii) Όμοια αν θέσουμε $y = (\sigma\varphi x)^{\frac{1}{\ln x}}$, τότε όταν $x \to 0^+$ έχουμε αοριστία της μορφής (∞^0) οπότε το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\ln\sigma\varphi x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sigma\varphi x}{\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sigma\varphi x}\left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\eta\mu 2x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{2\sigma\upsilon\nu 2x} = -1 = \ln\frac{1}{e}$$

Άρα είναι $\ln\lim\limits_{x\to 0^+} y = \ln\frac{1}{e} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} y = \frac{1}{e}$

Θέμα 17. Να υπολογιστούν τα όρια (μορφή $\infty - \infty$)

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(e^x+e^{-x})-x$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\eta\mu x}\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{\pi}{x-\pi}-\frac{x-\varepsilon\varphi x}{x-\pi}\right)$ **iv)** $\lim\limits_{\nu\to\infty}(\nu-\ln\nu)$

Λύση: Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{e^{2x}+1}{e^x}-x\right] = \lim_{x\to\infty}[\ln(e^{2x}+1)-\ln e^x-x] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}[\ln(e^{2x}+1)-2x] = \lim_{x\to\infty}[\ln(e^{2x}+1)-2\ln e^x] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}\right] = \ln\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}} = \ln\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = \ln 1 = 0$$

ii) Κάνουμε τις πράξεις στην παρένθεση και το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{-x+\pi+\varepsilon\varphi x}{x-\pi}\right) \overset{(\frac{0}{0})}{=\!=} \lim_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1}{1} = 0$$

iii) Όμοια κάνουμε τις πράξεις στην παρένθεση και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημx-x}{xημx}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{συνx-1}{ημx+xσυνx}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-ημx}{συνx+συνx-xημx}=0$$

iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x-\ln x$ της οποίας περιορισμός είναι η ακολουθία $a_ν = ν-\ln ν$.

Η f όταν το $x\to\infty$ παίρνει τη μορφή $(\infty-\infty)$ οπότε αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το x το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x}x+\ln x}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}(1-\ln x)=$$

$= -\infty$.

Άρα και η ακολουθία $(a_ν)$ έχει όριο το $-\infty$.

Θέμα 18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x+1)^{1+\frac{1}{x+1}}-x^{1+\frac{1}{x}}$

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $φ(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ με $\mathcal{D}(φ) = (0,+\infty)$

Η φ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη σ'αυτό οπότε ισχύει το Θ.Μ.Τ σε κάθε διάστημα της μορφής $[x,x+1]$.

Άρα $\exists\ ξ\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $φ'(ξ) = \dfrac{φ(x+1)-φ(x)}{x+1-x}$

Αλλά $φ'(ξ) = ξ^{\frac{1}{ξ}}\left(1+\frac{1}{ξ}\right)-ξ^{\frac{1}{ξ}-1}\ln ξ$ και $\dfrac{φ(x+1)-φ(x)}{x+1-x} =$

$= (x+1)^{1+\frac{1}{x+1}}-x^{1+\frac{1}{x}}$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = \lim\limits_{ξ\to\infty}φ'(ξ)$ (1) γιατί όταν $x\to+\infty \Rightarrow ξ\to+\infty$

Όμως $\lim\limits_{ξ\to\infty}φ'(ξ) = \lim\limits_{ξ\to\infty}ξ^{\frac{1}{ξ}}\left[1+\frac{1}{ξ}-\frac{\ln ξ}{ξ}\right]$ και επειδή

$$\lim_{ξ\to\infty}\frac{\ln ξ}{ξ}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{ξ\to\infty}\frac{1}{ξ}=0 \text{ και } \lim_{ξ\to\infty}ξ^{\frac{1}{ξ}}\overset{(\infty^0)}{=}e^{\lim\limits_{ξ\to\infty}\frac{1}{ξ}\ln ξ}$$

$$= e^{\lim\limits_{ξ\to\infty}\frac{\ln ξ}{ξ}} = e^0 = 1$$

Από την (1) έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = 1(1+0-0) = 1$

Συνεπώς το $\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = 1$.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Με τον κανόνα De L' Hospital να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{συνx-1}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{εφx}-e^{x}}{εφx-x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφx-ημx}{ημ^3x}$ v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2ημx}{συν3x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x\sqrt{1-x^2}}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

2. 'Ομοια με τον κανόνα De L' Hospital ή με άλλο τρόπο να υπολογιστούν τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{ημx-\sqrt[3]{ημx}}{συν^2x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συν(1-συνx)}{x^4}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{νx(x^{μ}-1)-μx(x^{ν}-1)}{(x-1)^2}$ iv) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-ημx)(1-ημ^2x)\ldots(1-ημ^{ν}x)}{συν^{2ν}x}$

3. Να προσδιοριστεί ο α και β έτσι ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}\ln^4x, & 0<x\le e\\ αx+β, & e<x<+\infty\end{cases}$$

Να είναι παραγωγίσιμη $\forall\, x\in \mathcal{D}(f)$.

4. Να υπολογιστούν τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xημx}{εφ^2x+1-συν2x}$

ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$ iv) $\lim\limits_{x\to -1}\left[συν\dfrac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}\right]$

5. Για ποιά πραγματικά κ,λ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημ4x}{x^3}+\dfrac{κ}{x^2}+λ\right)=0$.

6. Να υπολογιστούν τα όρια (μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

i) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x}$ iv) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x+\ln x}$

ii) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$ v) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{\ln(1+e^{4x})}$

iii) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{συνx\ln(x-c)}{\ln(e^x-e^c)}$ vi) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(3x-2)}{\sqrt[3]{x}}$

7. Όμοια με τον κανόνα De L' Hospital ή με άλλο τρόπο να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\eta\mu x}{\ln\varepsilon\varphi x}$

ii) $\lim_{x\to \pi^+}\dfrac{\ln(x-\pi)}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}$

iv) $\lim_{x\to (\frac{1}{2})}\dfrac{\ln(1-2x)}{\varepsilon\varphi(\pi x)}$

v) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2+4e^x)}{\sqrt{4x^2+4x+\alpha}}$

8. Αν $\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2-3x+2}-(\alpha x+\beta)] = 0$ τότε να βρεθούν τα πραγματικά α και β.

9. Με τον κανόνα De L' Hospital ή με άλλο τρόπο να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών

i) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^4+4\nu-2}{\nu^4-4}$

ii) $\alpha_\nu = \ln\dfrac{e\nu^4+4\nu^3-2}{\nu^4+4\nu^2+1}$

iii) $\alpha_\nu = \dfrac{(\ln\nu)^4}{\nu^3}$

iv) $\alpha_\nu = \dfrac{e^\nu}{\lambda^\nu}$, $\lambda > 1$

10. Να υπολογιστούν τα όρια (μορφή $0(\pm\infty)$).

i) $\lim_{x\to e^+}\ln(x-e)(\ln x-1)$

ii) $\lim_{x\to 0}x^\nu\ln x$

iii) $\lim_{x\to 0}(1-e^{2x})\sigma\varphi x$

iv) $\lim_{x\to\infty}x^2\ln\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}$

11. Όμοια να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\varepsilon\varphi x$

ii) $\lim_{x\to 0}(\eta\mu x\ln x)$

iii) $\lim_{x\to\infty}x^\nu\eta\mu\dfrac{\kappa}{x}$, $\kappa\in\mathbb{R}_+^*$

iv) $\lim_{x\to 0}\sigma\varphi x(1-\sigma\upsilon\nu x)$

12. Να υπολογιστούν τα όρια (μορφές $1^\infty, 0^0, \infty^0$)

i) $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

ii) $\lim_{x\to\infty}(1+\dfrac{4}{x})^x$

iii) $\lim_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x})^{\eta\mu x}$

iv) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\varepsilon\varphi x)^{\sigma\varphi x}$

v) $\lim_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu 3x)^{\frac{\nu}{x^2}}$

vi) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\ln\sigma\varphi x)^{\varepsilon\varphi x}$

13. Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών

i) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu}$ v) $\alpha_\nu = \left(\frac{3\nu+2}{\nu \;\; +\nu+1}\right)^{\frac{1}{\nu+4}}$

ii) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu+1}$ vi) $\alpha_\nu = \left(\eta\mu \frac{\nu\pi}{2\nu+1}\right)^{\nu^2}$

iii) $\alpha_\nu = (2\nu^2+3\nu+1)^{\frac{1}{\nu+2}}$ vii) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{\alpha}{\nu}+\frac{\alpha^2}{\nu^2}\right)^\nu$

iv) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\ln\nu}$ viii) $\alpha_\nu = \left[\frac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}+\beta^{\frac{1}{\nu}}}{2}\right]^\nu$

14. Να υπολογιστούν τα όρια (μορφή $\infty-\infty$)

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sigma\varphi x-\frac{1}{x}\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{2}{x^2}\right)$

15. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\eta\mu x}-\frac{1}{x^2}, & x>0 \\ x^2-4\lambda x+\lambda-3, & x\leq 0 \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να έχει όριο $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

16. Για ποιές τιμές των κ,λ υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)+\kappa x+\lambda x^2}{x^3}$$

17. Για ποιά τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x^4, & x\neq 0 \\ \lambda\in\mathbb{R}, & x=0 \end{cases}$$ είναι συνεχής στη θέση $x = 0$

18. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1-\sqrt[3]{1-\eta\mu\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{3}$

19. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\varepsilon\varphi x = 2$

20. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt{x}\left(1-\sqrt{1-\eta\mu(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\right) = +\infty$

21. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right) = 0$

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

5.20. Μονοτονία συνάρτησης

Τα παρακάτω θεωρήματα αναφέρονται στο μονότονο μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα (α,β) και στην συμπεριφορά μιας συνάρτησης σε ένα σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$.

Θεώρημα 1.Εάν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f'(x) > 0$ ∀ $x \in (\alpha,\beta)$, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο (α,β).

β) Αν $f'(x) < 0$ ∀ $x \in (\alpha,\beta)$ τότε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (α,β).

Απόδειξη: α) Αν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ με $\xi_1 < \xi_2$, τότε επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής, θα υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ έτσι, ώστε να έχουμε:

$$f(\xi_1)-f(\xi_2) = f'(\xi)(\xi_1-\xi_2)$$

Επειδή όμως $f'(\xi) > 0$, αφού $f'(x) > 0$ ∀ $x \in (\alpha,\beta)$ και αφού $\xi_1 < \xi_2$, θα είναι και $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ και επομένως αφού για τυχαία $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ με $\xi_1 < \xi_2$ είναι και $f(\xi_1) < f(\xi_2)$, έπεται ότι f γνήσια αύξουσα στο (α,β).

Παρατήρηση: Το αντίστροφο της πρότασης δεν ισχύει, δηλαδή αν f γνησίως αύξουσα στο (α,β), δεν έπεται αναγκαία και $f'(x) > 0$, γιατί όπως ξέρουμε αν η f είναι γνήσια αύξουσα, θα ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0, \text{ ενώ } \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \text{ και επομένως } f'(\xi) \geq 0$$

β) Η απόδειξη είναι όμοια.

Παράδειγμα.Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^5$ και πεδίο ορισμού αυτής το (-1,+1). Δείξετε ότι δεν είναι $f'(x) > 0$ ∀ $x \in (-1,+1)$.

Απάντηση: Προφανώς αν $\xi_1 < \xi_2$ με $\xi_1,\xi_2 \in (-1,1)$ θα είναι και $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ και είναι η f γνήσια αύξουσα στο (-1,1).Η πα-

ράγωγος αυτής είναι $f'(x) = 5x^4$ και δεν είναι $f'(x) > 0$ $\forall\, x \in (-1,1)$ αφού $f'(0) = 0$.

Θεώρημα 2. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f'(x) \geq 0$ $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$, τότε η f είναι αύξουσα στο (α,β).

β) Αν $f'(x) \leq 0$ $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$ τότε η f είναι φθίνουσα στο (α,β).

Απόδειξη: Όμοια όπως παραπάνω.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και δεν υπάρχει διάστημα $(\xi_1,\xi_2) \subseteq (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (\xi_1,\xi_2)$ και $f'(x) \geq 0$ $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$ ή αντίστοιχα $f'(x) \leq 0$ $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$, τότε η f γνήσια αύξουσα στο (α,β), αντίστοιχα η f γνήσια φθίνουσα στο (α,β).

Γιατί αν $f'(x) \geq 0$ $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$ βάσει των προηγούμενων θα έχουμε: $f\uparrow$ στο (α,β), αυτό όμως σημαίνει ότι αν $\xi_1 < x < \xi_2$ θα ισχύει $f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$. Εάν λοιπόν ήταν $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, τότε $f(x) = c$ $\forall\, x \in (\xi_1,\xi_2)$ και επομένως θα ήταν $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (\xi_1,\xi_2)$, το οποίο είναι άτοπο, αφού δεν υπάρχει $x \in (\xi_1,\xi_2)$ έτσι ώστε $f'(x) = 0$. Δεν είναι συνεπώς $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ και άρα $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ και η f είναι γνήσια αύξουσα στο (α,β).

Η απόδειξη ίδια αν $f'(x) \leq 0$ $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη στο (α,β), τότε δεν υπάρχει διάστημα $(\xi_1,\xi_2) \subseteq (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (\xi_1,\xi_2)$.

Γιατί αν υπήρχε διάστημα $(\xi_1,\xi_2) \subseteq (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε: $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (\xi_1,\xi_2)$ θα έπρεπε $f(x) = c$ $\forall\, x \in (\xi_1,\xi_2)$ αυτό σημαίνει, ότι η f δεν θα ήταν γνήσια μονότονη στο (α,β) και επομένως καταλήγουμε σε άτοπο.

3. Θα πρέπει να προσέξουμε ότι η εφαρμογή των παραπάνω προτάσεων πρέπει να γίνεται σε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα συνεχές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και όχι σε ένωση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Στην περίπτωση στην οποία έχουμε ένωση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$,

θα εξετάζουμε την μονοτονία της f σε κάθε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε την συνάρτηση f με f(x) = σφx και πεδίο ορισμού αυτής το $\mathcal{D}(f) = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$. Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία.

Απάντηση: Καταρχήν παρατηρούμε ότι η f έχει παράγωγο την $f'(x) = -\frac{1}{ημ^2 x}$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ και είναι προφανώς $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Τότε όμως θα έπρεπε να είναι f γνήσια φθίνουσα στο $\mathcal{D}(f)$.

Αλλά αν πάρουμε $\xi_1 = -\frac{\pi}{4}$ και $\xi_2 = \frac{\pi}{4}$ και τα δύο στο $\mathcal{D}(f)$ παρατηρούμε ότι είναι $\xi_1 < \xi_2$ και αν η f ήταν γνήσια φθίνουσα στο $\mathcal{D}(f)$ θα έπρεπε να έχουμε: $σφ\xi_1 > σφ\xi_2$, δηλαδή $-1 > 1$ άτοπο. Αυτό προκύπτει από το ότι το $\mathcal{D}(f)$ είναι μια ένωση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και όχι ένα συνεχές υποσύνολο αυτού.

Εάν εξετάσουμε την f στο $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ θα πάρουμε: f γνήσια φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ στο $(0, \pi)$ όμοια f γνήσια φθίνουσα στο $(0, \pi)$ και στο $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ όμοια f γνήσια φθίνουσα στο $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

2. Μελετήστε ως προς το μονότονο τις παρακάτω βασικές συναρτήσεις που μας είναι γνωστές από τον τόμο "Άλγεβρα 6_A".

α) $f(x) = αx+β / α, β \in \mathbb{R}$

β) $f(x) = αx^2+βx+γ / α, β, γ \in \mathbb{R}$, $α \neq 0$

γ) $f(x) = \frac{αx+β}{γx+δ} / α, β, γ, δ \in \mathbb{R}$, $γ \neq 0$, $αδ-βγ \neq 0$

Απάντηση: α) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = α$, οπότε:

1. $α > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ f γνήσια αύξουσα $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. $α < 0 \rightarrow f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ f γνήσια φθίνουσα $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. $α = 0 \rightarrow f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ f σταθερή $\forall x \in \mathbb{R}$.

β) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 2αx+β$, οπότε:

1. $\alpha > 0$ και $f'(x) > 0 \leftrightarrow 2\alpha x+\beta > 0 \leftrightarrow x > -\frac{\beta}{2\alpha} \rightarrow f$ γνήσιως αύξουσα στο $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$ και αν $f'(x) < 0 \leftrightarrow x < -\frac{\beta}{2\alpha} \rightarrow$

$\rightarrow f$ γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$.

2. $\alpha < 0$ και $f'(x) < 0 \leftrightarrow x < -\frac{\beta}{2\alpha} \rightarrow f$ γνήσια αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$ και αν $f'(x) > 0 \leftrightarrow x > -\frac{\beta}{2\alpha} \rightarrow f$ γνήσια φθίνουσα στο $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$.

3. Επειδή $f'(-\frac{\beta}{2\alpha}) = 0$, τό σημείο $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι σημείο στασιμότητας της f.

γ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{-\frac{\delta}{\gamma}\}$ και επειδή: $f(x) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{c}{x+\frac{\delta}{\gamma}}$

όπου $c = -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma} \neq 0$, θα έχουμε: $f'(x) = \frac{-c}{(x+\frac{\delta}{\gamma})^2}$, $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$.

Θα μελετήσουμε αυτήν σε κάθε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, δηλαδή στα υποσύνολα $(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma})$ και $(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$ αφού $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}) \cup (-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$.

1. Εάν $c > 0 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f$ γνησ. φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma})$ και f γνησ. φθίν. στο $(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$.

2. Εάν $c < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f$ γνησ. αύξ. στο $(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma})$ και f γνησ. αύξ. στο $(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$.

3. Μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς το μονότονο
α) $f(x) = 3x^4-5x^2+2$ β) $f(x) = \sqrt{x^2+2}-3|x|$

Απάντηση: α) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 12x^3-10x$
Είναι $f'(x) > 0 \leftrightarrow 12x^3-10x > 0 \leftrightarrow x(6x^2-5) > 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x(x-\sqrt{\frac{5}{6}})(x+\sqrt{\frac{5}{6}}) > 0$.

$$\begin{array}{cccccc} -\infty & -\sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & +\sqrt{\frac{5}{6}} & +\infty \\ \hline & - & + & - & + \end{array}$$

'Αρα $f'(x)>0\ \forall\ x\in(-\sqrt{\frac{5}{6}},0)\cup(\sqrt{\frac{5}{6}},+\infty)$ και επομένως είναι f γνήσια αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\sqrt{\frac{5}{6}},0)$, $(\sqrt{\frac{5}{6}},+\infty)$ και προφανώς $f'(x)<0\ \forall\ x\in(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{6}})\cup(0,\sqrt{\frac{5}{6}})$ και επομένως f γνήσια φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{6}})$, $(0,\sqrt{\frac{5}{6}})$

Τα σημεία 0, $-\sqrt{\frac{5}{6}}$, $\sqrt{\frac{5}{6}}$ είναι σημεία στασιμότητας.

β) Προφανώς $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ και είναι:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}-3 & \text{αν } x>0\\[2mm] \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}+3 & \text{αν } x<0\end{cases}$$

και για x = 0 δεν υπάρχει η παράγωγος της f.

Είναι $f'(x)>0\ \forall\ x\in\mathbb{R}^-$ και $f'(x)<0\ \forall\ x\in\mathbb{R}^+$ και επομένως f γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0)$ και f γνήσια φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Σημεία στασιμότητας δεν υπάρχουν.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Προβλήματα της μορφής $\varphi(x)\gtrless g(x)$ μπορούν να λυθούν με τη μέθοδο της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε συνήθως τη συνάρτηση $f(x)=\varphi(x)-g(x)$ και εξετάζουμε αν είναι συνεχής στο $\mathcal{D}(f)$ και παραγωγίσιμη σ'αυτό. Βρίσκουμε σε συνέχεια την πρώτη παράγωγο της και τα διαστήματα μονοτονίας της f'. Στα διαστήματα αυτά αν θεωρήσουμε κάποιο x τότε θα ισχύουν αντίστοιχα οι ανισότητες, που θα είναι οι για απόδειξη προτάσεις.

Με $x>x_1 \Rightarrow f(x)\gtrless f(x_1)$ αν η f είναι Μονότονη αντίστοιχα γνήσια μονότονη.

'Η με $x<x_1 \Rightarrow f(x)\gtrless f(x_1)$ αν η f είναι μονότονη αντίστοιχα γνήσια μονότονη.

Επίσης με την μέθοδο της μονοτονίας μιας συνεχούς συνάρτησης μπορούμε να αποδείχνουμε ότι μια συνάρτηση f έχει μοναδική ρίζα πραγματική σε ένα διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$.

Για το λόγο αυτό αποδείχνουμε ότι

i) Η f είναι συνεχής στο Δ.

ii) Η f είναι γνήσια μονότονη στο Δ.

iii) Η f παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές στο Δ.

Τα θέματα που ακολουθούν θα κάνουν ποιό κατανοητή τη μέθοδο.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Να αποδειχτούν οι ανισότητες

i) $e^x > x \;\forall . x \in \mathbb{R}$

ii) $e^x \geq x+1$

iii) $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{6} \;\forall\; x \in \mathbb{R}_+^*$

iv) $\ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{x(x+1)} \;\forall\; x \in \mathbb{R}_+^*$

Λύση: i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^x - x$ που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη σ'αυτό. Είναι δε $f'(x) = e^x - 1$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = 0$. Και είναι $f'(x) > 0$ $\forall\; x > 0$ και $f'(x) < 0 \;\forall\; x < 0$ οπότε:

α) Η f είναι γνήσια αύξουσα όταν $x > 0$ δηλαδή με $x > 0 \rightarrow$ $\rightarrow f(x) > f(0) \rightarrow e^x - x > e^0 - 0 \rightarrow e^x - x > 1 > 0 \rightarrow e^x - x > 0 \rightarrow$ $\rightarrow e^x > x$.

β) Η f είναι γνήσια φθίνουσα όταν $x<0$ δηλαδή με $x < 0 \rightarrow$ $\rightarrow f(x) > f(0) \rightarrow e^x - x > e^0 \rightarrow e^x - x > 1 > 0 \rightarrow e^x - x > 0 \rightarrow e^x > x$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x - 1$ και αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \geq 0 \;\forall\; x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι προφανής. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη σ'αυτό με $f'(x) = e^x - 1$. Είναι δε $f'(x) = 0$ για $x = 0$.

α) Αν $x > 0 \rightarrow f\uparrow \rightarrow f(x) > f(0) \leftrightarrow e^x - x - 1 > 0 \leftrightarrow e^x > x+1$

β) Αν $x < 0 \rightarrow f\downarrow \rightarrow f(x) > f(0) \leftrightarrow e^x - x - 1 > 0 \leftrightarrow e^x > x+1$

Άρα $\forall\; x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$.

iii) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = ημx - x + \frac{x^3}{6}$ με $x \in \mathbb{R}_+^*$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}_+^*$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^*$ και παραγωγίσιμη σ'αυτό με $f'(x) =$ $= συνx - 1 + \frac{x^2}{2}$.

Ακόμη είναι $f''(x) = -ημx + x > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}_+^*$ επειδή $ημx < x$.

'Αρα η f' είναι συνεχής $\forall \ x \in \mathbb{R}_+^*$ και γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}_+^*$.

Επομένως με $x > 0 \rightarrow f'(x) > f'(0) \rightarrow συνx - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$ που σημαίνει ότι $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}_+^*$ δηλαδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}_+^*$ δηλαδή με $x > 0 \rightarrow f(x) > f(0) \rightarrow ημx - x + \frac{x^3}{6} > 0 \rightarrow ημx > x - \frac{x^3}{6}$

iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$ και αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) < 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}_+^*$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ με $f'(x) =$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{(2x+2)2(x+1) - 2x(x+2)}{4(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{2(x+1)^2 - x(x+2)}{2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2(x+1) - 2(x+1)^2 + x(x+2)}{2(x+1)^2} = -\frac{x^2}{2(x+1)^2} < 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}_+^*$$

'Αρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}_+^*$. Επομένως με $x>0$ ισχύει $f(x) < f(0) \rightarrow \ln(1+x) - \frac{x(x+2)}{2(x+1)} < \ln 1 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \ln(1+x) - \frac{x(x+2)}{2(x+1)} < 0 \rightarrow \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$$

Θέμα 2. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο [α,β] παραγωγίσιμες στο (α,β) και ισχύουν

i) $f(\alpha) = g(\alpha)$

ii) $f'(x) \leq g'(x) \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$

Δείξετε ότι: $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (\alpha,\beta)$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ και έχουμε: $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) \leq 0 \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$ επομένως η φ είναι φθίνουσα στο (α,β). 'Αρα με $\alpha < x \rightarrow \varphi(\alpha) \geq \varphi(x)$ και επειδή $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = 0$ έχουμε ότι $\varphi(x) \leq 0 \leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$.

Θέμα 3. Δείξετε ότι $\forall \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha\beta > 0$ και $\rho \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$(1+\frac{\alpha}{\beta})^{\rho}+(1+\frac{\beta}{\alpha})^{\rho}\geq 2^{\rho+1}$$

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = (1+x)^{\rho}+(1+\frac{1}{x})^{\rho}-2^{\rho+1}$ όπου $x = \frac{\alpha}{\beta} > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)\geq 0 \ \forall \ x\in\mathbb{R}_+^*$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ και είναι $f'(x) = \rho(1+x)^{\rho-1}(1-\frac{1}{x^{\rho+1}})$

Μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$ στο $\mathbb{R}_+^*$ είναι η $x = 1$. Οπότε με $x>1 \Rightarrow x^{\rho+1}>1 \Rightarrow \frac{1}{x^{\rho+1}}<1 \Rightarrow f'(x)>0$ που σημαίνει ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Άρα με $x>1 \Rightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow (1+x)^{\rho}+(1+\frac{1}{x})^{\rho}-2^{\rho+1}>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1+\frac{\alpha}{\beta})^{\rho}+(1+\frac{\beta}{\alpha})^{\rho}>2^{\rho+1}.$$

Με $0<x<1 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ f γνήσια φθίνουσα στο $(0,1)$.

Άρα με $x<1 \Rightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow (1+\frac{\alpha}{\beta})^{\rho}+(1+\frac{\beta}{\alpha})^{\rho}-2^{\rho+1}>0$.

Με $x = 1$ η αποδεικτέα είναι προφανής.

Θέμα 4. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ δείξετε ότι:

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leq\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}$$

Απάντηση: Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = \frac{x}{1+x}$ και $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+\cup\{0\}$.

Επειδή $f'(x) = \frac{x'(1+x)-x(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \ \forall \ x\in\mathcal{D}(f)$ και επειδή $f'(x)>0 \ \forall \ x\in\mathcal{D}(f)$, έπεται ότι η f γνήσια αύξουσα στο $\mathcal{D}(f)$.

Τότε όμως, αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ θα είναι: $0\leq|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ και επομένως και $f(0)\leq f(|\alpha+\beta|)\leq f(|\alpha|+|\beta|)$, δηλαδή:

$$0\leq\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leq\frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|}=\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|+|\beta|}+\frac{|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|}\leq$$

$$\leq\frac{|\alpha|}{1+|\beta|}+\frac{|\beta|}{1+|\alpha|}$$

Θέμα 5. Δείξετε ότι: $e^x>1+x+\frac{x^2}{2} \ \forall \ x\in\mathbb{R}_+$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$. Η παράγωγος αυτής είναι: $f'(x) = e^x - 1 - x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$. Αλλά γνωρίζουμε ότι $e^x \geq 1+x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Μετά από αυτά η f γνήσια αύξουσα στο $\mathcal{D}(f)$ και επομένως αν $x > 0$ θα είναι και $f(x) > f(0) \Leftrightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0$, δηλαδή $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

Θέμα 6. Δείξετε ότι: $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$.

Απόδειξη: Επειδή $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$ αρκεί να δειχτεί η $x - 1 \leq x \ln x$ $\Leftrightarrow x \ln x - x + 1 \geq 0$. Εάν $f(x) = x \ln x - x + 1$, τότε $f'(x) =$ $= \ln x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$.

Είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ και συνεπώς η f γνήσια αύξουσα στο $(1, +\infty)$ και άρα $f(x) > f(1)$ $\forall\, x \in (1, +\infty)$, δηλαδή $x \ln x - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \ln x > x - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln x > 1 - \frac{1}{x}$.

Επίσης είναι $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ και επομένως η f γνήσια φθίνουσα στο $(0, 1)$ άρα αν $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \ln x - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 - \frac{1}{x}$. Αν $x = 1$, τότε $f'(1) = 0$, και έχουμε ισότητα. (Το $x = 1$ σημείο στασιμότητας της f).

Θέμα 7. Εάν $0 \leq \rho \leq 1$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, δείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta)^\rho \leq \alpha^\rho + \beta^\rho \qquad (1)$$

και στη συνέχεια ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha+\beta} \geq \sqrt[\nu]{\alpha} + \sqrt[\nu]{\beta}$ $\forall\, \nu \geq 1$.

Απόδειξη: Επειδή $\beta > 0$, θα έχουμε: $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)^\rho \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\rho + 1$ και αν $\frac{\alpha}{\beta} = x$, τότε: $(x+1)^\rho \leq x^\rho + 1$ με $x \in \mathbb{R}_+^*$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση f με $f(x) = x^\rho + 1 - (x+1)^\rho$ και $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Η παράγωγος αυτής είναι: $f'(x) = \rho x^{\rho-1} - \rho(x+1)^{\rho-1} =$ $= \rho(x^{\rho-1} - (x+1)^{\rho-1})$ και επειδή $x > 0$ θα είναι $x^{\rho-1} > (x+1)^{\rho-1}$ αφού $x < x+1$ και $\rho - 1 < 0$ από την υπόθεση.

Ώστε για $\rho > 0$ και $\rho - 1 < 0$ θα είναι $f'(x) > 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, δηλαδή $x^\rho + 1 < (1+x)^\rho$.

Προφανώς για $\rho = 0$ και $\rho = 1$ έχουμε την ισότητα. Ώστε ισχύει πάντοτε $(\alpha+\beta)^{\rho} \le \alpha^{\rho}+\beta^{\rho}$, όπου η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\rho = 0$ ή $\rho = 1$ και $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^{+}$.

Εάν τώρα $\nu \ge 1$, τότε $0 < \frac{1}{\nu} \le 1$ και άρα $\sqrt[\nu]{\alpha+\beta} \le \sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R}_{+}^{*})$

Θέμα 8. Δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)e^{x} = (x+1)e^{-x}$ έχει ρίζες πραγματικές δύο και μόνο δύο.

Απόδειξη: Γι αυτό θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = (x-1)e^{x}-(x+1)e^{-x}$ η οποία προφανώς είναι συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη.

Η παράγωγος αυτής είναι: $f'(x) = e^{x}+(x-1)e^{x}-e^{-x}+(x+1)e^{-x} = x(e^{x}+e^{-x})$.

Παρατηρούμε ότι για $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ και επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Αλλά $f(0) = -2$ και $f(+\infty) = +\infty$, δηλαδή το $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left[\frac{x-1}{x+1}e^{x}-e^{-x}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}(x+1)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}e^{x}-e^{-x}\right) = +\infty\,(1.\infty-0) =$$

$= +\infty$, έπεται ότι θα είναι $-2 \le f(x) < +\infty$ $\forall\, x \in (0,+\infty)$. Επειδή όμως η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι μηδενίζεται μία και μόνο μία φορά στο εν λόγω διάστημα αφού είναι και γνήσια αύξουσα. Μια ακριβώς ίδια εργασία για το διάστημα $(-\infty,0)$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει και άλλη μια και μόνο μια ρίζα στο $(-\infty,0)$.

Επειδή δε $f(0) \ne 0$ είναι φανερό, ότι μια ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι θετική και η άλλη αρνητική.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

i) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}_{+}$

ii) Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_{+}^{*}$

iii) $f(0) = 0$

iv) Η $f'\uparrow$ στο $\mathbb{R}_{+}^{*}$

Δείξετε ότι η συνάρτηση $g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων

i) f με $f(x) = x^2-3x+1$ v) f με $f(x) = x^2e^{-x}$

ii) f με $f(x) = \ln x-x+1$ vi) f με $f(x) = e^x+3x$

iii) f με $f(x) = e^x-x-1$ vii) f με $f(x) = \ln|x|$

iv) f με $f(x) = 3x^3-2x^2+3x$ iix) f με $f(x) = ημx+συνx$

3. Όμοια των συναρτήσεων

i) f με $f(x) = εφx+σφx$ iv) f με $f(x) = (x-2)^5(2x+1)^4$

ii) f με $f(x) = ημx-x/[0,\infty)$ v) f με $f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$

iii) f με $f(x) = x-\ln(x+1)/\ \mathbb{R}_+^*$

vi) f με $f(x) = (x-ημx)(π-x-ημx)/\ (0,\frac{π}{2})$

4. Να αποδειχτούν οι ανισότητες

i) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(x+1)<x\ \forall\ x\in\mathbb{R}_+^*$

ii) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}>\ln(1+x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}_+^*$

iii) $(1+x)^{1+x}>e^x\ \forall\ x\in\mathbb{R}_+^*$

iv) $\frac{2}{2x+1}<\ln(\frac{x+1}{x})<\frac{1}{x}\ \forall\ x\in\mathbb{R}_+^*$

v) $εφx+2ημx\geq 3x,\ x\in[0,\frac{π}{2})$

vi) $(1+x)^ν\geq 1+νx,\ x\in[-1,+\infty),\ ν\geq 1$ ή $ν\leq 0$

vii) $x^ν-1>ν(x-1)$ με $x>1$ ή $x<0$

viii) $x^ν-1<ν(x-1)\ \forall\ ν\in(0,1)$.

5. Δίδονται οι συναρτήσεις f,g: $(α,β)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες $\forall\ x\in(α,β)$ και $f'(x)>g'(x)\ \forall\ x\in(α,β)$.
Δείξετε ότι $f(x+t)-f(x)>g(x+t)-g(x)\ \forall\ x,x+t\in(α,β)$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$.
Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και σε συνέχεια να συγκριθούν οι αριθμοί $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{24}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} ημx, & x\in[0,\frac{π}{2}] \\ 1-συνx, & x\in(\frac{π}{2},π] \end{cases}$

Να μελετηθεί ως προς την παραγωγισιμότητα και την μονοτονία.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^{kx}}{x^2+\kappa^2}$, $\kappa \in \mathbb{R}-\{0\}$.

i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία

ii) $\forall\ \kappa \geq 1$ ισχύει $e^{kx} > 1+(\frac{x}{\kappa})^2$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

iii) Αν x_1, x_2 πραγματικές ρίζες της $f'(x) = 0$ να υπολογιστεί τό όριο $\lim\limits_{\kappa \to 0}\left(\frac{1+x_1x_2}{1-x_1x_2}\right)^{(\frac{x_1+x_2}{2})^2}$

9. Εάν $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ και $\alpha \geq \beta > 0$ δείξετε ότι $(1+\frac{\kappa}{\alpha})^{\alpha} \geq (1+\frac{\kappa}{\beta})^{\beta}$

10. $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ ισχύει $\alpha^{\beta}+\beta^{\alpha} > 1$

11. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^2}$

Δείξετε ότι: i) f↑ στο $\mathbb{R}$.

ii) $\frac{2}{3}(\sqrt{x^3}-\sqrt{(x-1)^3} < \sqrt{x} < \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}$

iii) Δείξετε ότι $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$\frac{2}{3}\sqrt{\nu^3} < 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{\nu} < \frac{2}{3}\sqrt{(\nu+1)^3}-1$

12. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με

$f(x) = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu}x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu = 2\rho$ και $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

13. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων

i) f με $f(x) = \sqrt[5]{x}-\ln x$

ii) f με $f(x) = (x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x}$

iii) f με $f(x) = \ln(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})$

iv) f με $f(x) = 2e^x+e^{-x}$

14. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $|f(x)+xf'(x)| \leq M$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}_+^*$.

Δείξετε ότι: i) Η συνάρτηση $\varphi(x) =$ [illegible]

ii) Η συνάρτηση $h(x) = xf(x)-\mu x$ είναι [illegible]

iii) Η f είναι φραγμένη.

15. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις

i) f με $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$ στο $[0,2\pi]$.

ii) f με $f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & x>0 \\ c, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

16. Δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3+2\alpha x+\beta = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ και $\beta \in \mathbb{R}$ έχει μια μόνο ρίζα πραγματική.

17. Δείξετε ότι οι εξισώσεις

i) $3^x+4^x+5^x = 6^x$

ii) $3^x+4^x = 5^x$

έχουν μοναδική πραγματική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

5.21. Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης.

Θεώρημα 1. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα **ανοιχτό διάστημα (α,β) και έστω $\xi \in (\alpha,\beta)$** στο οποίο υπάρχει **ή όχι η παράγωγος με $f'(\xi) = 0$. Τότε η f** παρουσιάζει στο ξ

i) Τοπικό μέγιστο, το $f(\xi)$ αν $\forall\, x \in (\alpha,\xi]$ είναι $f'(x) \ge 0$ **και $\forall\, x \in [\xi,\beta)$ είναι $f'(x) \le 0$**

ii) Τοπικό ελάχιστο το $f(\xi)$ αν $\forall\, x \in (\alpha,\xi]$ είναι $f'(x) \le 0$ **και $\forall\, x \in [\xi,\beta)$ είναι $f'(x) \ge 0$.**

Απόδειξη: i) αφού $f'(x) \ge 0$ $\forall\, x \in (\alpha,\xi]$, η f είναι αύξουσα στο $(\alpha,\xi]$ άρα ισχύει: $f(x) \le f(\xi)$ $\forall\, x \in (\alpha,\xi]$ (1).

Όμοια αφού $f'(x) \le 0$ $\forall\, x \in [\xi,\beta)$ η f είναι φθίνουσα στο $[\xi,\beta)$ άρα ισχύει: $f(x) \le f(\xi)$ $\forall\, x \in [\xi,\beta)$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι ισχύει $f(x) \le f(\xi)$ $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$ που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο ξ το $f(\xi)$

ii) Εργαζόμαστε όμοια.

Θεώρημα 2. Εάν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα Δ και $\xi \in \Delta$. Είναι δε $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) \neq 0$, τότε:

i) Αν $f''(\xi) > 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(\xi)$.

ii) Αν $f''(\xi) < 0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(\xi)$.

Απόδειξη: i) Έχουμε από την υπόθεση $f'(\xi) = 0$. Ας υποθέσουμε ότι $f''(\xi) < 0$. Επειδή f'' υποτέθηκε συνεχής στην θέση $x = \xi \in \Delta$ έπεται ότι υπάρχει περιοχή $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \subset \Delta$ έτσι ώστε $f''(x) < 0 \; \forall \; x \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$.

Αλλά επειδή η f'' είναι η πρώτη παράγωγος της f', θα έχουμε: $f''(x) < 0 \; \forall \; x \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \rightarrow f'$ γνήσια φθίνουσα $\forall \; x \in [\xi-\varepsilon, \xi]$ και f' γνήσια φθίνουσα $\forall \; x \in [\xi, \xi+\varepsilon]$ και επομένως $f'(x) \leq f'(\xi) = 0 \; \forall \; x \in (\xi-\varepsilon, \xi]$ και $f'(x) \geq f'(\xi) = 0 \; \forall \; x \in [\xi, \xi+\varepsilon]$ δηλαδή $f'(x) \geq 0 \; \forall \; x \in (\xi-\varepsilon, \xi]$ και $f'(x) \leq 0 \; \forall \; x \in [\xi, \xi+\varepsilon)$.
Αυτά όμως σημαίνουν $f \uparrow$ στο $(\xi-\varepsilon, \xi]$ και $f \downarrow$ στο $[\xi, \xi+\varepsilon)$ δηλαδή $f(x) \leq f(\xi) \; \forall \; x \in (\xi-\varepsilon, \xi]$ και $f(x) \leq f(\xi) \; \forall \; x \in [\xi, \xi+\varepsilon)$ και τελικά $f(x) \leq f(\xi) \; \forall \; x \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, που σημαίνει ότι η f έχει στην θέση $x = \xi$ τοπικό μέγιστο το $f(\xi)$.
Όμοια γίνεται και η απόδειξη του ii)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η συνθήκη $f''(\xi) \neq 0$ του θεωρήματος (2) είναι ικανή συνθήκη για να υπάρχει ακρότατο της f στο ξ, όχι όμως και αναγκαία. Π.χ η συνάρτηση $f(x) = x^6$ έχει $f'(x) = 6x^5$ με ρίζα την $x = 0$ και $f''(x) = 30x^4$ με $f''(0) = 0$. Όμως η f στο 0 έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$ γιατί $\forall \; x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = x^6 \geq f(0) = 0$.

2. Γενικότερα ισχύει: Αν υπάρχουν οι παράγωγοι της f μέχρι και ν τάξεως και είναι $f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(\nu-1)}(\xi) = 0$ ενώ $f^{(\nu)}(\xi) \neq 0$ τότε αν $\nu = 2\rho+1/\rho \in \mathbb{N}$ η f δεν έχει ακρότατο στο ξ, ενώ αν $\nu = 2\rho/\nu \in \mathbb{N}$ τότε η f έχει ακρότατο στο ξ, και αν $f^{(\nu)}(\xi) > 0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ το $f(\xi)$ και αν δε $f^{(\nu)}(\xi) < 0$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο ξ το $f(\xi)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Εύρετε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων (βασικών):

α) $f(x) = \alpha x+\beta / \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

β) $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma / \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

γ) $f(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma /\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

δ) $f(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} / \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 0,\ \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0.$

Απάντηση: α) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = \alpha$ και άρα δεν υπάρχει ρίζα στο $\mathbb{R}$ της $f'(x) = 0$, επομένως η f στερείται ακροτάτων. Είναι δε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right) =$$

$$= (+\infty)\alpha = \begin{cases} \to +\infty & \text{αν } \alpha > 0 \\ \to -\infty & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)\alpha =$$

$$= \begin{cases} \to -\infty & \text{αν } \alpha > 0 \\ \to +\infty & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

β) Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 2\alpha x+\beta$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι: $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Εξετάζουμε το πρόσημο της f΄ εκατέρωθεν του $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Εάν $\alpha > 0$, τότε $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ για } x > -\frac{\beta}{2\alpha} \\ f'(x) < 0 \text{ για } x < -\frac{\beta}{2\alpha} \end{cases}$ άρα το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) =$

$= \min f$, δηλαδή: $\min f = \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ για $\alpha > 0$ και $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Εάν $\alpha < 0$ τότε: $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ για } x < -\frac{\beta}{2\alpha} \\ f'(x) < 0 \text{ για } x > -\frac{\beta}{2\alpha} \end{cases}$ άρα το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) =$

$= \max f$, δηλαδή: $\max f = \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ για $\alpha < 0$ και $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (\sigma\eta\mu\alpha)\lim_{x\to+\infty} x^2 = \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ \to -\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

και όμοια $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ \to -\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

Το βρισκόμενο ακρότατο σε κάθε περίπτωση $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$ είναι απόλυτο.

γ) Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 4\alpha x^3 + 2\beta x$.

Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x_1 = 0$, και $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ εάν $-\frac{\beta}{2\alpha} \geq 0$. Εάν $-\frac{\beta}{2\alpha} < 0$ δεν υπάρχει άλλη ρίζα πραγματική εκτός της $x = 0$. Επομένως έχουμε:

1. Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ μια μόνο ρίζα, η $x = 0$
2. Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^-$ μια μόνο ρίζα, η $x = 0$
3. Εάν $\alpha\beta < 0$ τρείς ρίζες οι $x = 0$ κάι $x = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$.
4. Εάν $\beta = 0$ μία μόνο ρίζα η $x = 0$ (τριπλή).

Μελετούμε τώρα το πρόσημο της f' εκατέρωθεν των ριζών της για να καθορίσουμε το είδος ακρότατων.

Αυτά συμπεραίνουμε από τους παρακάτω πίνακες.

1 ($\alpha > 0$, $\beta > 0$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'			0		
f	$+\infty$	↘	$f(0) = \gamma$ ολ.ελαχ.	↗	$+\infty$

2 ($\alpha < 0$, $\beta < 0$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'			0		
f	$-\infty$	↗	ολ.μεγ $f(0)=\gamma$	↘	$-\infty$

3 ($\alpha > 0$, $\beta < 0$)

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}$		0		$\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοπ. ελαχ.	↗	τοπ. μεγ. γ	↘	$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοπ. ελαχ.	↗	$+\infty$

4 ($\alpha < 0$, $\beta > 0$)

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$		0		$\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	τοπ. μεγ. $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$	↘	γ τοπ. ελαχ.	↗	τοπ. μεγ. $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$	↘	$-\infty$

Υπενθυμίζουμε ότι: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \to +\infty & \text{αν } \alpha > 0 \\ \to -\infty & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

Από τους πίνακες αυτούς συμπεραίνουμε:

1. Εάν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει ολικό ελάχιστο το γ για $x = 0$.
2. Εάν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^-$ υπάρχει ολικό μέγιστο το γ για $x = 0$.
3. Εάν $\alpha > 0, \beta < 0$ υπάρχουν τοπικά ακρότατα τα: $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοπικό ελάχιστο για $x = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ και γ τοπικό μέγιστο για $x = 0$
4. Εάν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$ υπάρχουν τοπικά ακρότατα τα: $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοπικό μέγιστο για $x = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ και γ τοπικό ελάχιστο για $x = 0$.
5. Εάν $\beta = 0$ και $\alpha > 0$ προφανώς υπάρχει ολικό ελάχιστο το γ για $x = 0$ και αν $\alpha < 0$ ολικό μέγιστο το γ για $x = 0$ (Πίνακες (1),(2)).

δ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$. Η $f'(x) = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2} \neq 0$ και επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

2. Να βρεθούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ **β)** $f(x) = 2\text{συν}\frac{x}{2} + 3\text{συν}\frac{x}{3}$

γ) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{αν } x \leq 1 \\ 3-x & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ **δ)** $f(x) = \frac{e^x}{x^\nu}$ με $x \in (0,+\infty)$, $\nu \in \mathbb{N}$

Απάντηση: α) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η παράγωγος είναι:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + (x-2)\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2x-4}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$$

Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = \frac{4}{5}$ και το σημείο $x = 0$ σημείο ασυνέχειας της πρώτης παραγώγου (δεν υπάρχει η $f'(x)$)

Ώστε κρίσιμα σημεία είναι τα: $x = \frac{4}{5}$ και $x = 0$

Εξετάζουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του σημείου $x = \frac{4}{5}$

Έχουμε: $f'(x) > 0$ για $x > \frac{4}{5}$ και $f'(x) < 0$ για $0 < x < \frac{4}{5}$.

Μετά από αυτό στην θέση $x = \frac{4}{5}$ υπάρχει ένα τοπικό ελάχιστο το: $f(\frac{4}{5}) = (\frac{4}{5}-2)\sqrt[3]{(\frac{4}{5})^2} = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}$

Αφ'ετέρου για τη θέση $x = 0$ παρατηρούμε ότι για $x < 0$ έχουμε $f'(x) > 0$ και για $x > 0$,αλλά $x < \frac{4}{5}$ έχουμε $f'(x) < 0$ δηλαδή στην θέση $x = 0$ έχουμε ένα τοπικό μέγιστο. Το μέγιστο είναι το $f(0) = 0$.

Πρόφανώς η f είναι συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$ και είναι αμέσως φανερό ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Είναι εύκολο να γίνει γραφική παράσταση αυτής.

β) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Για την απλούστευση του λογισμού θέτουμε $\frac{x}{6} = \varphi$ και παίρνουμε: $\sigma(\varphi) = 2συν3\varphi + 3συν2\varphi$.

Επειδή η σ είναι περιοδική με περίοδο 2π θα την εξετάσουμε σ'ένα διάστημα μιας περιόδου $[-\pi,\pi]$.

Για την συνάρτηση λοιπόν σ με $\sigma(\varphi) = 2συν3\varphi + 3συν2\varphi$ και $\mathcal{D}(\sigma) = [-\pi,\pi]$ έχουμε τα παρακάτω:

α) Η σ είναι παντού συνεχής στο $\mathcal{D}(\sigma)$.

β) $\sigma(-\pi) = \sigma(\pi) = 1$

Βρίσκουμε την σ' η οποία είναι:

$$\sigma'(\varphi) = -6ημ3\varphi - 6ημ2\varphi = -12ημ\frac{5\varphi}{2}συν\frac{\varphi}{2}$$

Οι ρίζες της $\sigma'(\varphi) = 0$ είναι μόνο οι ρίζες της $ημ\frac{5\varphi}{2} = 0$, αφού στο ανοιχτό διάστημα $(-\pi,\pi)$ είναι πάντοτε $συν\frac{\varphi}{2} \neq 0$.

Οι ρίζες της $ημ\frac{5\varphi}{2} = 0$ στο ανοιχτό διάστημα $(-\pi,\pi)$ είναι οι

$\varphi_1 = -\frac{4\pi}{3}$, $\varphi_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = \frac{2\pi}{3}$ και $\varphi_5 = \frac{4\pi}{3}$

((Αφού $\frac{5\varphi}{2} = \mu\pi \leftrightarrow \varphi = \frac{2\mu\pi}{5}$ και $-\pi < \frac{2\mu\pi}{5} < \pi$ για $\mu = -2,-1,0,1,2$))

Μετά από τα παραπάνω και για να καθορίσουμε το πρόσημο της σ' εκατέρωθεν κάθε μιας από τις ρίζες της καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα.

φ	$-\pi$		$-\frac{4\pi}{5}$		$-\frac{2\pi}{5}$		0		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{4\pi}{5}$		π
σ'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	
σ	1	↗	$5συν\frac{2\pi}{5}$	↘	$-5συν\frac{\pi}{5}$	↗	5	↘	$-5συν\frac{\pi}{5}$	↗	$5συν\frac{2\pi}{5}$	↘	1

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Για $\varphi = \pm\pi + 2\kappa\pi / \kappa \in Z$ έχουμε **τοπικό** ελάχιστο το 1, δηλαδή για $x = 12\kappa\pi \pm \pi$.

2. Για $\varphi = \pm\frac{4\pi}{5} + 2\kappa\pi / \kappa \in Z$ έχουμε **τοπικό** μέγιστο το $5\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5} = 5\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ δηλαδή για $x = 12\kappa\pi \pm \frac{24\pi}{5}$

3. Για $\varphi = \pm\frac{2\pi}{5} + 2\kappa\pi / \kappa \in Z$ έχουμε **ολικό** ελάχιστο το $-5\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5} = -5\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (αφού $-5\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5} < 1$), δηλαδή για $x = 12\kappa\pi \pm \frac{12\pi}{5}$

4. Για $\varphi = 0 + 2\kappa\pi / \kappa \in Z$ έχουμε **ολικό** μέγιστο το 5, δηλαδή για $x = 12\kappa\pi$.

γ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{αν } x < 1 \\ -1 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

και η παράγωγος στη θέση $x = 1$ αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει γιατί:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}\frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} 2(x+1) = 4$$

ενώ $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{3-x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{1-x}{x-1} = -1$

Ώστε θα εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει στα κρίσιμα σημεία, δηλαδή εκείνα για τα οποία $f'(x) = 0$ και εκείνα για τα οποία δεν υπάρχει η f'. Αυτά είναι τα $x = 0$ και $x = 1$.

Παρατηρούμε ότι για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και επομένως για $x = 0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$. Για $x = 1$ θα έχουμε ένα τοπικό μέγιστο, γιατί για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για $x > 1$ είναι $f'(x) < 0$. Το μέγιστο είναι το $f(1) = 2$.

δ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = (0,+\infty)$. Επειδή $f'(x) = \frac{e^x x^\nu - \nu e^x x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = \frac{e^x x^{\nu-1}(x-\nu)}{x^{2\nu}} = \frac{e^x(x-\nu)}{x^{\nu+1}}$, οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = \nu$. Επειδή $f'(x) > 0$ για $x > \nu$ και $f'(x) < 0$ για $0 < x < \nu$, έπεται ότι υπάρχει ελάχιστο για $x = \nu$ και είναι το $f(\nu) = \frac{e^\nu}{\nu^\nu}$.

3. Βρείτε τα ακρότατα των **παρακάτω συναρτήσεων:**

α) $f(x) = 2x^3-18x^2+48x-14$	δ) $f(x) = x \ln x$
β) $f(x) = (x-1)^7$	ε) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
γ) $f(x) = x^x$	στ) $f(x) = x^6$

Απάντηση: α) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Η παράγωγος είναι: $f'(x) = 6x^2-36x+48$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι: $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$. Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 12x-36$. Επειδή $f''(2) = -12 < 0$, η συνάρτηση στην θέση $x = 2$ παρουσιάζει μέγιστο, το οποίο είναι: $f(2) = 26$.

Επειδή $f''(4) = 12 > 0$, η συνάρτηση στην θέση $x = 4$ παρουσιάζει ελάχιστο, το οποίο είναι: $f(4) = 18$.

Επειδή του $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$ (αντίστοιχα), έπεται ότι τα βρισκόμενα ακρότατα είναι τοπικά.

β) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Η παράγωγος είναι $f'(x) = 7(x-1)^6$. Ρίζες της $f'(x) = 0$ μόνο η $x = 1$.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 42(x-1)^5$, για την οποία είναι $f''(1) = 0$ και επομένως θα εφαρμόσουμε την πρώτη μέθοδο.

Επειδή όμως για $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για $x < 1$ είναι και πάλι $f'(x) > 0$, έπεται, ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Στο ίδιο συμπέρασμα φθάνουμε αν πάρουμε τις παραγώγους μέχρι και της $f^{(7)}$ και βρίσκουμε ότι $f(x) = c \neq 0$ και επειδή ο 7 είναι περιττός, η f στερείται ακροτάτων.
Εάν είχαμε την $f(x) = (x-1)^4$, τότε $f'(x) = 4(x-1)^3$; $f''(x) = 12(x-1)^2$, $f'''(x) = 24(x-1)$ και $f^{(4)}(x) = 24$ και είναι: $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$, ενώ $f^{(4)}(1) = 24 \neq 0$.
Επειδή εδώ είναι $f^{(4)}(1) = 24 > 0$ έχουμε στην θέση $x = 1$ τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι το $f(1) = 0$.

γ) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$. Ο τύπος της f γράφεται και ως εξής: $f(x) = e^{x \ln x}$
Η πρώτη παράγωγος είναι: $f'(x) = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(1+\log x)$. Οι ρίζες αυτής είναι οι ρίζες της $1 + \ln x = 0$

$\ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e}$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = (x^x)'(1+\ln x)+x^x(1+\ln x)' =$
$= x^x(1+\ln x)^2+x^x\,\frac{1}{x}$.

Έχουμε: $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} > 0$ και επομένως στην θέση $x =$
$= \frac{1}{e}$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το οποίο είναι:
$f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

δ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathcal{D}(f)$.
Η πρώτη παράγωγος είναι: $f'(x) = 1+\ln x$.
Οι ρίζες της είναι: $x = \frac{1}{e}$.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = \frac{1}{x}$ και επειδή $f''\left(\frac{1}{e}\right) =$
$= e > 0$, έπεται, ότι η f στην θέση $x = \frac{1}{e}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι το $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

ε) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$.
Η πρώτη παράγωγος είναι: $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ και οι ρίζες της είναι: $x = e$.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = \frac{(1-\ln x)'x^2-(x^2)'(1-\ln x)}{x^4}$
$= \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x-3}{x^3}$.

Επειδή $f''(e) = \frac{-1}{e^3} < 0$ έπεται ότι η f στην θέση $x = e$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο είναι: $f(e) = \frac{1}{e}$.

στ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x) = 6x^5$ με ρίζα την $x = 0$.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 30x$ και επειδή $f''(0) =$
$= 0$ εφαρμόζουμε την πρώτη μέθοδο. Είναι $f'(x) > 0$ για $x > 0$ και $f'(x) < 0$ για $x < 0$ και επομένως στην θέση $x = 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι το $f(0) = 0$.
Ή και ως εξής: Έχουμε $f''(x) = 30x^4$, $f^{(3)}(x) = 120x^3$, $f^{(4)}(x) = 360x^2$, $f^{(5)}(x) = 720x$, $f^{(6)}(x) = 720 > 0$, άρα η στην θέση $x = 0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

4. Ποιό απ'όλα τα ορθογώνια σταθεράς περιμέτρου 2α,έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Απάντηση: Εάν x,y οι διαστάσεις του ζητούμενου ορθογώνιου, θα έχουμε: $2x+2y = 2\alpha \Leftrightarrow x+y = \alpha$. Και επίσης $xy = E$. Έχουμε $E = x(\alpha-x)$. Για την συνάρτηση E με $E(x) = x(\alpha-x)$ έχουμε $\mathcal{D}(E) = (0,\alpha)$. Ζητάμε το μέγιστο E.

Επειδή $E'(x) = \alpha-2x$, οι ρίζες της $E'(x) = 0$ είναι: $x = \frac{\alpha}{2}$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $E''(x) = -2 < 0$ και επομένως και $E''(\frac{\alpha}{2}) = -2 < 0$ και η συνάρτηση E στην θέση $x = \frac{\alpha}{2}$ παρουσιάζει μέγιστο προφανώς απόλυτο. Το μέγιστο E είναι το $E(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}(\alpha-\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha^2}{4}$ και αντιστοιχεί στις διαστάσεις $x = y = \frac{\alpha}{2}$, δηλαδή το τετράγωνο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$.

1η ΜΕΘΟΔΟΣ (ακροτάτων)

Για να βρούμε τα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f(x) τα οποία είναι θέσεις ακροτάτων εργαζόμαστε ως εξής:

i) Βρίσκουμε τις πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$

ii) Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες ή είναι $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ τότε η f δεν έχει ακρότατα

iii) Αν ρ μια ρίζα της της $f'(x) = 0$ τότε εξετάζουμε το πρόσημο της $f'(x)$ προ και μετά την ρ.

Τότε α) Αν $f'(x) > 0$ για $x < \rho$ και $f'(x) < 0$ για $x > \rho$ η f έχει μέγιστο (max) στη θέση $x = \rho$ και είναι ο αριθμός $f(\rho)$

β) Αν $f'(x) < 0$ για $x < \rho$ και $f'(x) > 0$ για $x > \rho$ η f έχει ελάχιστο (min) στη θέση $x = \rho$ και είναι ο αριθμός $f(\rho)$.

γ) Αν η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο προ και μετά την ρίζα ρ τότε η f δεν έχει ακρότατο στη θέση $x = \rho$.

iv) Βρίσκουμε τα σημεία ξ του $\mathcal{D}(f)$ στα οποία η f(x) δεν έχει παράγωγο τότε αν προ και μετά αυτών των σημείων η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο η f(x) έχει ακρότατο στη θέση $x = \xi$

και είναι το $f(\xi)$.

Επίσης αν θέλουμε να αποδείξουμε ανισότητες της μορφής $f(x) \gtreqless \kappa$ (1) τότε θεωρούμε μια κατάλληλη συνάρτηση $f(x)$ της οποίας προσδιορίζουμε τα ακρότατα τότε αν στη θέση $x = \xi \in \mathcal{D}(f)$ η $f(x)$ έχει ακρότατο μέγιστο ή ελάχιστο τότε θα ισχύει αντίστοιχα $f(x) \gtreqless f(\xi) = \kappa$. Δηλαδή η ανισότητα (1).

Για να έχουμε και μια εποπτική αντιμετώπιση και συγχρόνως μια επαλήθευση των παραπάνω καταστρώνουμε ένα πίνακα στον οποίο σημειώνουμε και τα διαστήματα μονοτονίας της f Τα θέματα που ακολουθούν θα κάνουν ποιό κατανοητά τα παραπάνω.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x) = e^x - xe^x - 1$ και συμπεράνετε ότι $\forall\ x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \le 0$

Λύση: Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη $\forall\ x \in \mathbb{R}$ και είναι $f'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$.

Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι η $x = 0$.

Με $x > 0$ έχουμε $f'(x) < 0$ και με $x < 0$ έχουμε $f'(x) > 0$.

Επομένως στη θέση $x = 0$ η f έχει ακρότατο και μάλιστα μέγιστο το $f(0) = 0$ Καταστρώνουμε και τον πίνακα μεταβολών της f που είναι ↑ στα $(-\infty, 0]$ και ↓ στο $[0, +\infty)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		+	0	-	
f		↗	Τ.Μ $f(0)$	↘	

Από τον πίνακα και από το ότι η f στη θέση $x = 0$ έχει μέγιστο συμπεραίνουμε ότι $\forall\ x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \le f(0) \Longleftrightarrow e^x - xe^x - 1 \le 0$.

Θέμα 2. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) f με $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 + 5$ v) f με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ii) f με $f(x) = x^3+2x^2-x-2$ vi) f με $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

iii) f με $f(x) = x^4e^{-x^2}$

iv) f με $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ vii) f με $f(x) = \begin{cases} 4x^2+1, & x \in (-\infty, 2] \\ -2x+13, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$

Λύση: i) H f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $f'(x) = -x^3-3x^2-2x = -x(x^2+3x+2) = -x(x+1)(x+2)$.

Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$ που είναι και οι πιθανές θέσεις ακροτάτων. Καταστρώνουμε τον πίνακα μεταβολών της f

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	0	−	
f		↗	T M	↘	T E	↗	T M	↘	

στον οποίο σημειώνουμε και τα διαστήματα μονοτονίας της.

Επειδή στις θέσεις $x = -2$ και $x = 0$ η παράγωγος είναι προ θετική και μετά αρνητικά η f έχει μέγιστο τοπικό το $f(-2) = 7$ και $f(0) = 5$ και στη θέση $x = -1$ η f έχει ελάχιστο τοπικό το $f(-1) = \frac{17}{4}$. Από τον πίνακα μεταβολών της f συμπεραίνουμε ότι $\forall\ x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq f(-2) = 7$.

ii) H f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2+4x-1$ και ρίζες της $x_1 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$, $x_2 = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ που είναι και οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.

Επειδή δε είναι $f'(x) > 0\ \forall\ x \in (-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}] \cup [\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$ και $f'(x) < 0\ \forall\ x \in [\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}]$ η f έχει στη θέση $x = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ τοπικό μέγιστο το $f(\frac{-2-\sqrt{7}}{3})$ και στη θέση $x = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ τοπικό ελάχιστο το $f(\frac{-2+\sqrt{7}}{3})$

iii) H f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη $\forall\ x \in \mathbb{R}$ και είναι

$f'(x) = 4x^3e^{-x^2}-2x^5e^{-x^2} = 2x^3e^{-x^2}(2-x^2)$

Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$ που είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.

Το σημείο της πρώτης παραγώγου προ και μετά των ριζών είναι

$f'(x) > 0\ \forall\ x \in (-\infty, -\sqrt{2})$, $f'(x) < 0\ \forall\ x \in (-\sqrt{2}, 0)$, $f'(x) > 0$ $\forall\ x \in (0, \sqrt{2})$ και $f'(x) < 0\ \forall\ x \in (\sqrt{2}, +\infty)$.

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	0	−	
f		↗	T M	↘	T E	↗	T M	↘	

Επομένως όπως φαίνεται από τον πίνακα μεταβολών της f έχουμε στις θέσεις $x_1 = -\sqrt{2}$ και $x_2 = \sqrt{2}$ τοπικό μέγιστο το $f(+\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = \frac{4}{e^2}$ και στη θέση $x_3 = 0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

Σημείωση: Από τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{4}{e^2}$ είναι η μεγαλύτερη τιμή της f δηλαδή ισχύει $f(x) \leq f(\pm\sqrt{2}) = \frac{4}{e^2}$.

iv) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,1) \cup (1,+\infty)$ και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι δε

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} =$$

$= -\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} < 0\ \forall\ x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

v) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ στο οποίο είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Είναι δε $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

Πιθανές θέσεις ακροτάτων είναι οι ρίζες της πρώτης παραγώγου που είναι η $x = e$.

Επειδή δε είναι $f'(x) > 0\ \forall\ x \in (0,e)$ και $f'(x) < 0$ $\forall\ x \in (e,\infty)$ η f έχει στη θέση $x = e$ ολικό μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

vi) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι συνεχής εί-

ναι δε $f'(x) = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

'Αρα η f δεν έχει παράγωγο στη θέση $x = 0$.

Επομένως η θέση $x = 0$ είναι πιθανή θέση ακρότατου. Επειδή δε με $x > 0 \rightarrow f'(x) > 0$ και με $x < 0 \rightarrow f'(x) < 0$.

Η f' στη θέση $x = 0$ έχει τοπικό ελάχιστο τον αριθμό $f(0)=0$

Προφανώς ισχύει $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq f(0) = 0$.

vii) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 2] \cup (2, +\infty) = \mathbb{R}$ στο οποίο είναι συνεχής και δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x = 2$. Πράγματι είναι $f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{4x^2+1-17}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{4(x^2-4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{4(x-2)(x+2)}{x-2} = 16$ και

$f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{-2x+13-17}{x-2} = -\infty$

Επίσης είναι $f'(x) = \begin{cases} 8x, & x \in (-\infty, 2) \\ -2, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$

Ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι η $x = 0$.

Επομένως πιθανές θέσεις ακροτάτων της f είναι οι $x_1 = 2$, $x_2 = 0$. Επειδή δε είναι $\forall\, x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) < 0$ και $\forall x \in (0,2)$ $f'(x) > 0$ η f έχει στη θέση $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 1$ ακόμη, επειδή $\forall\, x \in (2, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ η f στη θέση $x_2 = 0$ έχει τοπικό μέγιστο το $f(2) = 17$ όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		-	0	+	‖	-	
f		↘	T.E	↗	TM	↘	

Θέμα 3. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) f: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2ημ^2x - 2ημx + 3$

ii) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = συν2x + 2ημx$

iii) f: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = ημ2x - x$

Λύση: i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

και είναι $f'(x) = 4ημxσυνx - 2συνx = 2συνx(2ημx-1)$.

Είναι δε $f'(x) = 0 \leftrightarrow \left\{συνx = 0,\ ημx = \frac{1}{2}\right\} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left\{x = \pm\frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{6}\right\}$.

Άρα οι πιθανές θέσεις ακροτάτων είναι οι $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$. Επειδή δε $\forall\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ είναι $f'(x) \leq 0$ και $\forall\ x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f'(x) \geq 0$ η f έχει στις θέσεις $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ και $x_3 = \frac{\pi}{2}$ τοπικό μέγιστο και είναι αντίστοιχα το $f(-\frac{\pi}{2}) = 7$ και $f(\frac{\pi}{2}) = 3$ και στη θέση $x_2 = \frac{\pi}{6}$ τοπικό ελάχιστο το $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{2}$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	0	-	0	+	0
f	T M		T E		T E

Ο διπλανό πίνακας δείχνει τις μεταβολές της f στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και τις αντίστοιχες θέσεις ακροτάτων.

ii) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι δε και περιοδική με περίοδο το 2π, επομένως θα βρούμε τις θέσεις ακροτάτων στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Είναι $f'(x) = -2ημ2x + 2συνx = 2συνx(1-2ημx)$.

Η παράγωγος έχει ρίζες τις ρίζες του $συνx = 0$ και $ημx = \frac{1}{2}$ που βρίσκονται στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Δηλαδή:

$\left\{x = κ\pi + \frac{\pi}{2},\ x = 2κ\pi + \frac{\pi}{6},\ x = (2κ+1)\pi - \frac{\pi}{6},\ κ \in Z\right\}$.

Με $κ = 0$ έχουμε $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ και με $κ = 1$ έχουμε $x = \frac{3\pi}{2}$

Άρα οι πιθανές θέσεις ακροτάτων είναι οι $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$

$x_3 = \frac{3\pi}{2}$, $x_4 = \frac{5\pi}{6}$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{9\pi}{6}$		2π
f'		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗		↘		↗	

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f στις θέσεις $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_4 = \frac{5\pi}{6}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και είναι $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}$ και $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2}$ και στις θέσεις $x_1 = \frac{\pi}{2}$ και $x_3 = \frac{3\pi}{2}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και είναι $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ και $f(\frac{3\pi}{2}) = -3$ αντίστοιχα

iii) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με παράγωγο $f'(x) = 2συν2x-1$. Η πρώτη παράγωγος έχει ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης $2συν2x-1 = 0 \Leftrightarrow συν2x = \frac{1}{2} = συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 2κ\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $κ \in Z \Leftrightarrow x = κ\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $κ \in Z$

Πρέπει δε $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le κ\pi \pm \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$, $κ \in Z$

α) Αν $-\frac{\pi}{2} \le κ\pi + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le κ + \frac{1}{6} \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \le κ \le \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{4}{6} \le κ \le \frac{2}{6} \Rightarrow -\frac{2}{3} \le κ \le \frac{1}{3}$, $κ \in Z \Rightarrow κ = 0$

β) Αν $-\frac{\pi}{2} \le κ\pi - \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{2\pi}{6} \le κ\pi \le \frac{4\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{3} \le κ \le \frac{1}{3}$, $κ \in Z \Rightarrow κ = 0$.

Άρα πιθανές θέσεις ακροτάτων στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι οι $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$. Και επειδή $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}]$ είναι $f'(x) \le 0 \Rightarrow f\downarrow$ στο $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}]$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ είναι $f'(x) \ge 0 \Rightarrow f\uparrow$ στο $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ και $\forall x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ είναι $f'(x) \le 0$ $\Rightarrow f\downarrow$ στο $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

Επομένως η f έχει στη θέση $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ τοπικό ελάχιστο το $f(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$ και στη θέση $x_2 = \frac{\pi}{6}$ τοπικό μέγιστο

το $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Ο διπλανός πίνακας δείχνει τις μεταβολές της f και τα διαστήματα μονοτονίας της.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		-	0	+	0	-	
f		↘	Τ Ε	↗	Τ Μ	↘	

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+\alpha\ln x-\beta x+4$. Να βρεθούν τα πραγματικά α,β έτσι ώστε η f να έχει ακρότατα στις θέσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

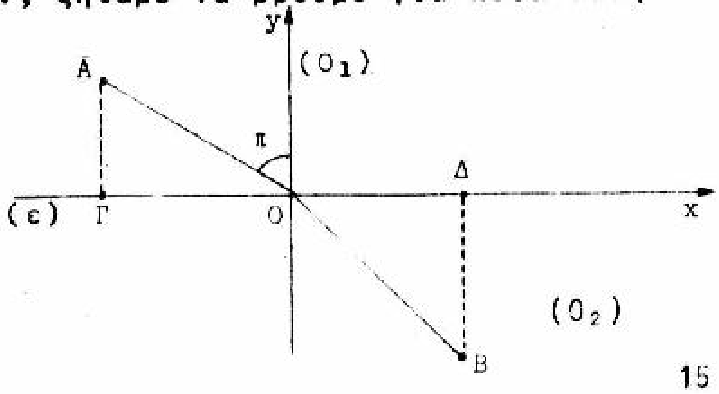
Λύση: Για να είναι τα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ θέσεις ακροτάτων της f πρέπει να είναι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ και να μην είναι ρίζες της $f''(x) = 0$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ με $f'(x) = 2x+\frac{\alpha}{x}-\beta$.

$$\text{Άρα πρέπει}\quad \left.\begin{array}{c} f'(1) = 0 \wedge f'(2) = 0 \\ \wedge \\ f''(1) \neq 0 \wedge f''(2) \neq 0 \end{array}\right\} \leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha-\beta+2 = 0 \\ \alpha-2\beta+8 = 0 \\ 2-\alpha \neq 0, 2-\frac{\alpha}{4} \neq 0 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

Θέμα 5. Στην διάθλαση του φωτός, για να μεταβεί το φως από κάποιο σημείο Α ενός οπτικού μέσου (O_1) σ'ένα σημείο Β ενός άλλου οπτικού μέσου (O_2) ακολουθεί πορεία του ελάχιστου δυνατού χρόνου.

Απόδειξη: 'Εστω ότι η ταχύτητα του φωτός στο μέσο (O_1) είναι v_1 και στο μέσο (O_2) είναι v_2. Εάν (ε) Η διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων, ζητάμε να βρούμε για ποιά θέση του σημείου Ο επί της (ε) ο χρόνος διαδρομής του φωτός από Α σε Β είναι ελάχιστος.



'Εστω (ΓΟ) = x και (ΓΔ) = λ, οπότε

οπότε (ΟΔ) = λ-x.

Εάν (ΑΓ) = α και (ΒΔ) = β, ο χρόνος t της διαδρομής από Α σε Β θα είναι: $t = \frac{(AO)}{v_1} + \frac{(BO)}{v_2} = \frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\beta^2+(\lambda-x)^2}}{v_2} = f(x)$ και παρατηρούμε ότι ο χρόνος t είναι συνάρτηση της μεταβλητής x, δηλαδή t = f(x). Η παράγωγος είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{x-\lambda}{\sqrt{\beta^2+(\lambda-x)^2}}$$

Και για να έχουμε ελάχιστο πρέπει f'(x) = 0, δηλαδή:

$$v_2 \frac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} = v_1 \frac{\lambda-x}{\sqrt{\beta^2+(\lambda-x)^2}}$$

δηλαδή: $v_2 \frac{(\Gamma O)}{(AO)} = v_1 \frac{(\Delta O)}{(BO)} \rightarrow v_2 \eta\mu\pi = v_1 \eta\mu\delta \rightarrow \frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta} = \frac{v_1}{v_2} = c.$

Θέμα 6. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x-\kappa|^3+|x-\lambda|^3$ και $\kappa < \lambda$, $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$.
Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η f έχει ακρότατα.



Λύση: Η f γράφεται με πολλαπλό τύπο

$$f(x) = \begin{cases} (x-\kappa)^3+(x-\lambda)^3, & x \geq \lambda \\ (x-\kappa)^3-(x-\lambda)^3, & \kappa \leq x < \lambda \\ -(x-\kappa)^3-(x-\lambda)^3, & x < \kappa \end{cases}$$

Έχει δε παράγωγο συνάρτηση την

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x-\kappa)^2+3(x-\lambda)^2, & x \geq \lambda \\ 3(x-\kappa)^2-3(x-\lambda)^2, & \kappa < x < \lambda \\ -3(x-\kappa)^2-3(x-\lambda)^2, & x \leq \kappa \end{cases}$$

η οποία γίνεται μηδέν για $x = \frac{\kappa+\lambda}{2}$ (πιθανή θέση ακροτάτου)

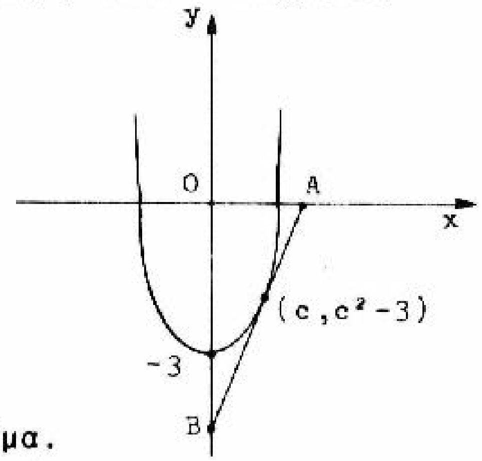
Επειδή δε αν $x < \frac{\kappa+\lambda}{2}$ είναι $f'(x) < 0$ και αν $x > \frac{\kappa+\lambda}{2}$ είναι $f'(x) > 0$ η f έχει ελάχιστο στη θέση $x = \frac{\kappa+\lambda}{2}$ και είναι $f\left(\frac{\kappa+\lambda}{2}\right)$.

Θέμα 7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2-3$. Η εφαπτομένη στο σημείο x = c (c > 0) του διαγράμματος της τέμνει τον άξονα x'x στο Α και τον y'y στο Β. Δείξετε:

i) Το εμβαδό του τριγώνου $E(OAB) = \frac{1}{4c}\ (3+c^2)^2$

ii) Για ποιές τιμές του c το E(OAB) γίνεται ελάχιστο.

Λύση: i) Πρέπει να βρούμε τις συντεταγμένες των Α και Β που θα είναι οι πραγματικές λύσεις του συστήματος με εξισώσεις την $y = 0$ και την εξίσωση (ε) της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη $x = c$ του διαγράμματος της f της $x = 0$ και της (ε) όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (c,c^2-3) του διαγράμματος της f είναι: $y-f(c) = f'(c)(x-c)$ (1) και επειδή $f'(c) = 2c$ και $f(c) = c^2-3$ η (1) γίνεται $y-c^2+3 = 2c(x-c)$ (2)

Άρα για τα σημεία Α και Β έχουμε $A(\frac{c^2+3}{2c},0), B(0,-3-c^2)$

και το εμβαδόν είναι: $E(OAB) = \frac{|OA||OB|}{2} = \frac{3+c^2}{2c}\cdot\frac{3+c^2}{2} =$

$= \frac{1}{4c}\ (3+c^2)^2$ μονάδες τετραγωνικές.

ii) Ονομάζουμε f(c) το εμβαδό. Η μικρότερη τιμή της συνάρτησης f(c) αν υπάρχει θα είναι στις θέσεις $c = \xi$ όπου ξ ρίζα της πρώτης παραγώγου της f(c).

Είναι $f'(c) = \frac{3}{4c^2}\ (c^4+2c^2-3) = \frac{3}{4c^2}\ (c-1)(c+1)(c^2+3)$ και

$f'(c) = 0 \leftrightarrow c = \pm 1$.

Ακόμη είναι $\forall c\ (0,1]$, $f'(c) \leq 0 \leftrightarrow f(c)\downarrow$ και $\forall\ c \in [1,\infty)$, $f'(c) \geq 0 \rightarrow f\uparrow$.

Άρα η f(c) στη θέση $c = 1$ έχει τοπικό ελάχιστο το $f(1) =$ $= 4$ τετρ. μονάδες.

Θέμα 8. Δείξετε ότι $\forall\ x \in \mathbb{R}$ είναι $(\eta\mu x)^{2^\nu}+(\sigma\upsilon\nu x)^{2^\nu} \geq 2^{1-2^{\nu-1}}$ (1).

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = (\eta\mu x)^{2^\nu}+(\sigma\upsilon\nu x)^{2^\nu}$
Η f είναι περιοδική με ελάχιστη θετική περίοδο την $\frac{\pi}{2}$.
Αρκεί επομένως να βρούμε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της

f στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και για την απόδειξη της (1) πρέπει σε κάποια θέση x = ξ η f να έχει ολικό ελάχιστο το $f(\xi) = 2^{1-2^{\nu-1}}$

Βρίσκουμε την παράγωγο της f και είναι:

$f'(x) = 2^{\nu}(\eta\mu x)^{2^{\nu}-1}\sigma\upsilon\nu x - 2^{\nu}(\sigma\upsilon\nu x)^{2^{\nu}-1}\eta\mu x =$

$= 2^{\nu}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left[(\eta\mu x)^{2^{\nu}-2} - (\sigma\upsilon\nu x)^{2^{\nu}-2}\right]$ (2)

Ρίζες της (2) στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ είναι εκείνες για τις οποίες

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{4},\ x_3 = \frac{\pi}{2}$

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι f'(x) αλλάζει πρόσημο στη θέση $x_2 = \frac{\pi}{4}$ και είναι $f'(x) \leqslant 0\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		−	0	+	
f		↘	Τ.Ε	↗	

και $f(x) \geqslant 0\ \forall\ x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Αρα η f παρουσιάζει στη θέση $x_2 = \frac{\pi}{4}$ ολικό ελάχιστο το $f(\frac{\pi}{4}) = 2^{1-2^{\nu-1}}$.

Άρα $\forall\ x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq f(\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow (\eta\mu x)^{2^{\nu}} + (\sigma\upsilon\nu x)^{2^{\nu}} \geq 2^{1-2^{\nu-1}}$

Θέμα 9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha\ln\frac{x}{\beta} - (\alpha+\kappa)\ln\frac{x+\kappa}{\beta+\kappa}$

$\alpha,\beta,\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ με $\beta < \alpha$. Δείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha+\kappa}{\beta+\kappa}\right)^{\alpha+\kappa} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} \leq 0$$

Λύση: Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και είναι $f'(x) = \alpha\frac{1}{\frac{x}{\beta}}\left(\frac{x}{\beta}\right)' - (\alpha+\kappa)\frac{1}{\frac{x+\kappa}{\beta+\kappa}}\left(\frac{x+\kappa}{\beta+\kappa}\right)' =$

$= \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha+\kappa}{x+\kappa} = \frac{\kappa(\alpha-x)}{x(x+\kappa)}$

Ρίζα μοναδική της πρώτης παραγώγου είναι η x = α.

Άρα πιθανή θέση ακροτάτου της f είναι η x = α.

Επειδή δε $\forall\ x \in (0,\alpha)$ είναι $f'(x) \geq 0 \rightarrow f\uparrow$ και $\forall\ x \in (\alpha,\infty)$ είναι $f'(x) \leq 0 \rightarrow f\downarrow$ που σημαίνει ότι η f στη θέση x = α έχει μέγιστο (ολικό) και είναι το $f(\alpha) = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} - \ln\left(\frac{\alpha+\kappa}{\beta+\kappa}\right)^{\alpha+\kappa}$

Επομένως $\forall\ x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \le f(\alpha)$ (1).
'Αρα η (1) θα ισχύει και για $x = \beta$ οπότε έχουμε
$f(\beta) \le f(\alpha) \rightarrow \alpha \ln 1 - (\alpha+\kappa)\ln 1 \le f(\alpha) \leftrightarrow f(\alpha) \ge 0 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} - \ln\left(\frac{\alpha+\kappa}{\beta+\kappa}\right)^{\alpha+\kappa} \ge 0 \leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} \ge \ln\left(\frac{\alpha+\kappa}{\beta+\kappa}\right)^{\alpha+\kappa}$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} \ge \left(\frac{\alpha+\kappa}{\beta+\kappa}\right)^{\alpha+\kappa} \leftrightarrow \left(\frac{\alpha+\kappa}{\beta+\kappa}\right)^{\alpha+\kappa} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} \le 0.$$

Θέμα 10. $\forall\ x \in \mathbb{R}$ δείξετε: $4x^4+x^2+x-2x^3+1 > 0$ (1)

Λύση: Με $x = 0$ είναι φανερή, αρκεί επομένως να αποδειχτεί η (1) με $x \ne 0$. Θέτουμε $f(x) = 4x^4+x^2+x-2x^3+1$ και αρκεί να δείξουμε $f(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}-\{0\}$. Η f γράφεται:

$$f(x) = 4x^4-2x^3+x^2+x+1 = 4x^4-2x^3+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

και αν θέσουμε $g(x) = 4x^4-2x^3+\frac{3}{4}$ και $\varphi(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

τότε επειδή $\varphi(x) \ge 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι το ακρότατο της f είναι θετικό.

Είναι: $f'(x) = 16x^3-6x^2 = 2x^2(8x-3)$ με μοναδική ρίζα την $x = \frac{3}{8}$. 'Αρα στη θέση $x = \frac{3}{8}$ η f πιθανώς να έχει ακρότατα.

Επειδή δε $\forall\ x \in (-\infty, \frac{3}{8}]$ είναι $g'(x) \le 0$ και $\forall\ x \in [\frac{3}{8}, +\infty)$ είναι $g'(x) \ge 0$ που σημαίνει ότι η g έχει στη θέση $x = \frac{3}{8}$ τοπικό ελάχιστο το $g(\frac{3}{8})$. Είναι επομένως αρκετό να δείξουμε ότι $g(\frac{3}{8}) > 0$.

'Εχουμε: $g\left(\frac{3}{8}\right) = 4\left(\frac{3}{8}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{8}\right)^3 + \frac{3}{4} = 2\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(2\frac{3}{8}-1\right) + \frac{3}{4} = 2\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}$ και πρέπει: $2\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4} > 0 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow -2\left(\frac{3}{8}\right)^3 > -3 \leftrightarrow 2\left(\frac{3}{8}\right)^3 < 3 \leftrightarrow 2.3^3 < 3.8^3$$ που είναι προφανές. Επομένως η (1) ισχύει $\forall\ x \in \mathbb{R}$

Θέμα 11. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^{\alpha}-\alpha x$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in (0,1)$. Δείξετε ότι:

i) $f(x) \le 1-\alpha$

ii) Αν $\alpha+\beta = 1$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$ είναι $x^{\alpha}y^{\beta} \le \alpha x+\beta y\ \forall x,y \in \mathbb{R}_+^*$

Λύση: i) Για την απόδειξη της (i) είναι αρκετό να δείξουμε ότι η f έχει μέγιστο και είναι το 1-α.
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ και είναι $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1}-1)$, μηδενίζεται δε μόνο για x = 1.
Και επειδή με $0 < x \le 1$ είναι $f'(x) \ge 0$ και με $1 \le x$ είναι $f'(x) \le 0$ η f στη θέση x = 1 έχει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1-\alpha$ και επομένως $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$ ισχύει $f(x) \le f(1) \leftrightarrow$ (i).
ii) Η για απόδειξη γράφεται λόγω της $\alpha+\beta = 1$, $x^\alpha y^{1-\alpha} \le \alpha x + (1-\alpha)y \leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha y \le \alpha x + y - \alpha y \leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \le \alpha\left(\frac{x}{y}\right) + 1 - \alpha \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha - \alpha\left(\frac{x}{y}\right) \le 1-\alpha$ που είναι προφανής γιατί είναι η (i) με $x = \left(\frac{x}{y}\right)$.

Θέμα 12. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$ **ισχύει:** $\sqrt[4]{x} - 2x \le \frac{3}{8}$.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^{\frac{1}{4}} - 2x$ και αρκεί να δείξουμε ότι το μέγιστο της f είναι ο αριθμός $\frac{3}{8}$.
Είναι $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 2 = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - 2$ $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$
και έχει ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 1 - 8\sqrt[4]{x^3} = 0 \leftrightarrow 1 - (2\sqrt[4]{x})^3 = 0 \leftrightarrow \sqrt[4]{x} = \frac{1}{2} \leftrightarrow x = \frac{1}{16}$

Άρα πιθανή θέση ακροτάτου είναι η $x = \frac{1}{16}$
Επειδή δε $\forall\, x \in (0, \frac{1}{16}]$ είναι $f'(x) \ge 0$ και $\forall\, x \in [\frac{1}{16}, +\infty)$ είναι $f'(x) \le 0$ η f στη θέση $x = \frac{1}{16}$ έχει ολικό μέγιστο τον αριθμό $f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16} - 2\,\frac{1}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
Άρα η για απόδειξη ανισότητα ισχύει $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$.

Θέμα 13. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ **με** $f(x) = \sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-x^2})$. **Δείξετε ότι** $0 \le f(x) \le \frac{1}{4}$.

Λύση: Η σχέση $f(x) \ge 0$ είναι προφανής. Αρκεί να δείξουμε τη

$f(x) \leq \frac{1}{4}$. Και αρκεί να δείξουμε ότι το ακρότατο (maxf) είναι το $\frac{1}{4}$. Έχουμε $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}(1-\sqrt{1-x^2})+\sqrt{1-x^2}\left(\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=$

$= \frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}+x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+2x = x\left(2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ με ρίζες

$x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Άρα πιθανές θέσεις ακροτάτων της f είναι οι $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Επειδή όμως $\forall\ x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ είναι $f'(x) \geq 0$ και $\forall\ x \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ είναι $f'(x) \leq 0$ η f στη θέση $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει ολικό μέγιστο το $f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{1-\frac{3}{4}}\left(1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{4}$

Επομένως $\forall\ x \in [0,1]$ ισχύει $f(x) \leq f(\frac{\sqrt{3}}{2}) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-x^2}) \leq \frac{1}{4}$.

2η ΜΕΘΟΔΟΣ (ακροτάτων)

Τα ακρότατα μιας συνάρτησης f και τη λύση ανισοτήτων της μορφής $f(x) \gtrless \kappa$ (1) μπορούμε να πετύχουμε κάνοντας χρήση και της δεύτερης παραγώγου της f.

Για το λόγο αυτό ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία.

i) Βρίσκουμε τις ρίζες (πραγματικές) της πρώτης παραγώγου

ii) Βρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο f'' της f.

iii) Αν ξ κάποια ρίζα της πρώτης παραγώγου f' της f τότε αν $f''(\xi) \neq 0$ και f'' συνεχής στο ξ τότε ισχύουν:

α) Αν $f''(\xi) > 0$ η f έχει στη θέση $x = \xi$ **ελάχιστο** το $f(\xi)$

β) Αν $f''(\xi) < 0$ η f έχει στη θέση $x = \xi$ **μέγιστο** το $f(\xi)$

iv) Αν $f''(\xi) = 0$ τότε η f μπορεί να έχει ή όχι ακρότατο στη θέση $x = \xi$.

Τότε βρίσκουμε την πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγο ανώτερης τάξης στη θέση $x = \xi$ και αν αυτή είναι περιττής τάξης δεν υπάρχει ακρότατο, αν είναι άρτιας τάξης υπάρχει ακρότατο στη θέση $x = \xi$. Δηλαδή ισχύει:

$f^{(\nu)}(\xi) < 0$ και $\nu = 2\rho/\rho \in \mathbb{N}$ η f έχει μέγιστο στη θέση $x=\xi$

το f(ξ).
$f^{(\nu)}(\xi) > 0$ και $\nu = 2\rho / \rho \in \mathbb{N}$ η f έχει ελάχιστο στη θέση $x = \xi$ το f(ξ).
$f^{(\nu)}(\xi) \neq 0$ και $\nu = 2\rho + 1 / \rho \in \mathbb{N}$ η f δεν έχει ακρότατο στην θέση $x = \xi$.

Για την λύση ανισοτήτων της μορφής $f(x) \gtreqless \kappa$ εργαζόμαστε όπως στην 1η μέθοδο (ακροτάτων).

Η μέθοδος αναπτύσσεται με παραδείγματα.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Δίνεται η συνάρτηση f: $[-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Να βρεθούν τα ακρότατα της f και από αυτά συμπεράνετε την αλήθεια της ανισότητας:

$$-\frac{1}{2} \leq x\sqrt{1-x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Λύση: Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f και τις ρίζες της και τις αντικαθιστούμε στην δεύτερη παράγωγο.

Είναι: $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \to f'(x) = 0 \leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

και $f''(x) = \dfrac{2x^3-3x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ όπου με $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \to f''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\frac{2}{4}-3\right)}{\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}} = -4 < 0$ που σημαίνει ότι η f έχει στη θέση

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ τοπικό μέγιστο τον αριθμό $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ και με

$x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \to f''\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 > 0$ που σημαίνει ότι η f έχει στη

θέση $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ τοπικό ελάχιστο τον αριθμό $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

Προφανώς τα ακρότατα αυτά είναι και ολικά δηλαδή ισχύει

$\forall\, x \in [-1,1] \quad f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x\sqrt{1-x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Θέμα 2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha\eta\mu x + \frac{1}{3}\eta\mu 3x$.

Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε στη θέση $x = \frac{\pi}{3}$ να έχει η f ακρότατο.

Λύση: Για να έχει η f στη θέση $x = \frac{\pi}{3}$ ακρότατο πρέπει και αρκεί $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$ και $f''(\frac{\pi}{3}) \neq 0$. Αλλά είναι $f'(x) = ασυνx+συν3x$ και $f''(x) = -αημx-3ημ3x$. Άρα πρέπει να ισχύουν: $\{ασυν\frac{\pi}{3}+συνπ = 0 \wedge αημ\frac{\pi}{3}+3ημπ \neq 0\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\frac{α}{2}-1 = 0 \wedge \frac{\sqrt{3}}{2}α \neq 0\} \Leftrightarrow α = 2$

Με $α = 2$ η $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$ και $f''(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} < 0$ επομένως η f έχει τοπικό μέγιστο τον αριθμό $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

Θέμα 3. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) f με $f(x) = συνx-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}$

ii) f με $f(x) = (x-3)^6$

Λύση:i) Η f είναι συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη. Είναι δε $f'(x) = -ημx+x-\frac{x^2}{2}$ με μια προφανή ρίζα την $x = 0$.

Η $f''(x) = -συνx+1-x$ και επειδή $f''(0) = 0$ βρίσκουμε την πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγο της f στη θέση $x = 0$.

Η $f'''(x) = ημx-1 \rightarrow f'''(0) = -1 \neq 0$.

Επειδή η παράγωγος που δεν μηδενίζεται είναι περιττής τάξης η f δεν έχει ακρότατα.

ii) Όμοια βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο που είναι $f'(x) = 6(x-3)^5$ με ρίζα την $x = 3$. Είναι $f''(x) = 30(x-3)^4 \rightarrow$

$\rightarrow f''(3) = 0$

$f'''(x) = 120(x-3)^3 \rightarrow f'''(3) = 0$

$f^{(4)}(x) = 360(x-3)^2 \rightarrow f^{(4)}(3) = 0$

$f^{(5)}(x) = 720(x-3) \rightarrow f^{(5)}(3) = 0$ και

$f^{(6)}(x) = 720$ με $f^{(6)}(3) \neq 0$.

Επειδή η παράγωγος που δεν μηδενίζεται είναι άρτιας τάξης η f έχει ακρότατο στη θέση $x = 3$ και επειδή $f^{(6)}(3) > 0$ το ακρότατο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο και είναι το $f(3) = 0$

Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 3$ και είναι $f(3) = 0$

Θέμα 4. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x) = $ $= ημx^2$ στο διάστημα $[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}]$.

Λύση: Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με πρώτη παράγωγο συνεχή στο $[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}]$ και είναι $f'(x) = 2xσυνx^2$ και $f''(x) = $ $= 2συνx^2 - 4x^2ημx^2$. Είναι δε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0$ ή $συνx^2 = 0\}$ $\Leftrightarrow \{x = 0$ ή $x^2 = 2κπ \pm \frac{π}{2}, κ \in Z\} \Leftrightarrow \{x = 0$ ή $x = \pm\sqrt{\frac{π}{2}}\}$

Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f είναι οι $x_1 = 0$, $x_2 = $ $= -\sqrt{\frac{π}{2}}$, $x_3 = +\sqrt{\frac{π}{2}}$. Βάζουμε στην δεύτερη παράγωγο τις ρίζες της πρώτης παραγώγου και έχουμε:

i) $f''(0) = 2 > 0$ επομένως στη θέση $x_1 = 0$ η f έχει ελάχιστο τον αριθμό $f(0) = 0$.

ii) $f''(-\sqrt{\frac{π}{2}}) = 2συν\frac{π}{2} - 4\frac{π}{2}ημ\frac{π}{2} = -2π < 0$, επομένως στη θέση $x_2 = -\sqrt{\frac{π}{2}}$ η f έχει μέγιστο τον αριθμό $f(-\sqrt{\frac{π}{2}}) = $ $= ημ\frac{π}{2} = 1$.

iii) $f''(\sqrt{\frac{π}{2}}) = 2συν\frac{π}{2} - 4\frac{π}{2}ημ\frac{π}{2} = -2π < 0$, επομένως στην θέση $x_3 = \sqrt{\frac{π}{2}}$ η f έχει και άλλο μέγιστο τον αριθμό $f(\sqrt{\frac{π}{2}}) = $ $= ημ\frac{π}{2} = 1$.

Θέμα 5. Εάν $x_1, x_2, \ldots, x_ν \in \mathbb{R}$ βρείτε το ελάχιστο της $f(x) = $ $= (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + \ldots + (x-x_ν)^2$.

Λύση: Η πρώτη παράγωγος είναι:

$f'(x) = 2(x-x_1) + 2(x-x_2) + \ldots + 2(x-x_ν)$

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_ν}{ν}$

Επειδή η $f''(x) = 2ν > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η f στην θέση $x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_ν}{ν}$ παρουσιάζει ελάχιστο, προφανώς απόλυτο.

Θέμα 6. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2e^{-\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$. Να προσδιορίσετε τον α έτσι ώστε η f να έχει ακρότατο το $\frac{4}{e^2}$ για $x \neq 0$.

Λύση: Είναι $f'(x) = 2xe^{-\alpha x} - \alpha x^2 e^{-\alpha x}$ (1) και

$f''(x) = e^{-\alpha x}(\alpha^2x^2 - 4\alpha x + 2)$ (2).

Ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι ρίζες της $2xe^{-\alpha x} - \alpha x^2 e^{-\alpha x} = 0$

$\leftrightarrow xe^{-\alpha x}(2-\alpha x) = 0 \leftrightarrow x = \frac{2}{\alpha}$ επειδή $x \neq 0$.

Η πιθανή θέση ακροτάτου είναι η $x = \frac{2}{\alpha}$ και η (2) για αυτή την τιμή του x γίνεται:

$f''\left(\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-2}\left(\alpha^2 \frac{4}{\alpha^2} - 4\alpha\frac{2}{\alpha} + 2\right) = -2e^{-2} < 0$ που σημαίνει ότι

η f έχει μέγιστο στη θέση $x = \frac{2}{\alpha}$ το $f\left(\frac{2}{\alpha}\right) = \frac{4}{\alpha^2}e^{-2}$ (3)

Αλλά από την υπόθεση πρέπει $\frac{4}{\alpha^2}e^{-2} = \frac{4}{e^2} \leftrightarrow \alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha = 1$

γιατί $\alpha > 0$. Επομένως με $\alpha = 1$ η f έχει ακρότατο με $x \neq 0$ το $\frac{4}{e^2}$.

Θέμα 7. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f: $\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha+\beta+\gamma+x-4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma x}$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}^*_+$. Σε συνέχεια δείξετε ότι $\alpha+\beta+\gamma+\delta+3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} > \alpha+\beta+\gamma+4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}$ $\forall\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}^*_+$

Λύση: Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f που είναι:

$f'(x) = 1 - 4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma}\ \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

Είναι $f'(x) = 0 \leftrightarrow \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{\alpha\beta\gamma} \leftrightarrow x = \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ (1)

Η δεύτερη παράγωγος της f είναι:

$f''(x) = -\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma}\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}} > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^*_+$ (2)

Η (2) λόγω της (1) γίνεται:

$f''(\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}) = \sqrt[4]{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma})^2}} > 0$

Επομένως η f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ και είναι $f(\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma})$. 'Αρα ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ $f(x) \geq f(\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}) \leftrightarrow$

$\alpha+\beta+\gamma+x-4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma x} > \alpha+\beta+\gamma+\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}-4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} \leftrightarrow$

$\alpha+\beta+\gamma+x-4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma x} > \alpha+\beta+\gamma+\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}-4\sqrt[12]{\alpha^4\beta^4\gamma^4} \leftrightarrow$

$\alpha+\beta+\gamma+x-4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma x} > \alpha+\beta+\gamma-3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\ \forall\ x\in\mathbb{R}_+^*$

οπότε με $x = \delta$ παίρνουμε: $\alpha+\beta+\gamma+\delta+3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} > \alpha+\beta+\gamma+4\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Θέμα 8. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^\alpha e^{2\alpha-x}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Δείξετε:

i) $xff'' = xf'^2-(f^2+ff')$

ii) Για ποιά τιμή του α ισχύει η μέγιστη τιμή της f γίνεται ελάχιστη.

Λύση: i) Βρίσκουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωνο της f και αντικαθιστούμε στα δύο μέλη της (i).

ii) Βρίσκουμε το ακρότατο της f. Είναι

$f'(x) = (e^{\alpha\ln x}e^{2\alpha-x})' = (e^{\alpha\ln x+2\alpha-x})' = f(x)\left(\frac{\alpha}{x}-1\right)$ με μοναδική ρίζα την $x = \alpha$.

Βρίσκουμε και την δεύτερη παράγωνο της f. Είναι

$f''(x) = f'(x)\left(\frac{\alpha}{x}-1\right)-\frac{\alpha}{x^2}f(x) = f(x)\left(\frac{\alpha}{x}-1\right)^2-\frac{\alpha}{x^2}f(x) =$

$= f(x)\left[\left(\frac{\alpha}{x}-1\right)^2-\frac{\alpha}{x^2}\right]$ και για $x = \alpha$ γίνεται $f''(\alpha) =$

$= -\frac{1}{\alpha}f(\alpha) < 0$ που σημαίνει ότι η f έχει στη θέση $x = \alpha$ τοπικό μέγιστο το $f(\alpha) = \alpha^\alpha e^\alpha = e^{\alpha\ln\alpha+\alpha}$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $f(t) = e^{t\ln t+t}$ με $t > 0$ (1)

της οποίας βρίσκουμε τα ακρότατα.

Είναι $f'(t) = f(t)(\ln t+2)$ με ρίζα την $\ln t = -2\ln e \to$

$\to \ln t=\ln e^{-2} \to t = e^{-2}$.

Βρίσκουμε και την δεύτερη παράγωνο και έχουμε

$f''(t) = f'(t)(\ln t+2)+f(t)\frac{1}{t} = f(t)(\ln t+2)^2+\frac{1}{t}f(t) =$

$= f(t)\left[(\ln t+2)^2+\frac{1}{t}\right]$

Αν στην $f''(t)$ βάλουμε την ρίζα $t = e^{-2}$ της πρώτης παραγώγου έχουμε: $f''(e^{-2}) = f(e^{-2})\ \frac{1}{e^{-2}} = e^2 f(e^{-2}) > 0$

Επομένως η συνάρτηση (1) έχει ελάχιστο τοπικό για $t = e^{-2}$

και είναι το $f(e^{-2}) = (e^{-2})^{e^{-2}} e^{e^{-2}} = e^{-2e^{-2}+e^{-2}} = e^{-e^{-2}}$

'Αρα αν $\alpha = t = e^{-2}$ θα ισχύει το (ii).

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Με την 1η ή την 2η Μέθοδο να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

   i) f με $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$

   ii) f με $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

   iii) f με $f(x) = xe^x$

   iv) f με $f(x) = 6x^3-9x^2+3$

   v) f με $f(x) = 4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu 2x$

   vi) f με $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$

2. 'Ομοια να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

   i) f με $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$

   ii) f με $f(x) = x-\ln(1+x^2)$

   iii) f με $f(x) = (x+1)^5e^{-x}$

   iv) f με $f(x) = x(x-1)^2(x-3)^3$

   v) f με $f(x) = e^{x^2}-1$

   vi) f με $f(x) = \ln x\sqrt{x}$

   vii) f με $f(x) = \eta\mu 3x-3\sigma\upsilon\nu x$

   iix) f με $f(x) = 2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 2x$

3. Δίνεται η συνάρτηση f: $[0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \max\{\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x\}$.

   i) Να βρεθεί η παράγωγος της f

   ii) Να βρεθούν τα ακρότατα της f.

4. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x) = (1-x)^{1-x}\, x^x$ με $x \in (0,1)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1+2x-x^2, & x \in [-1,2] \\ \dfrac{14}{x}+x-10, & x \in (2,4] \end{cases}$

   Να βρεθούν τα ακρότατά της.

6. Εάν $\alpha > \beta > 0$ να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x) = \alpha\eta\mu x + \dfrac{\beta}{\eta\mu x}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = |x-2|+|2x-1|$

   i) Να βρεθούν τα ακρότατα της.

ii) Συμπεράνετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{2}$ $\forall$ $x \in \mathcal{D}(f)$.

iii) Αν $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $x_1 \geq 2$ και $x_1+x_2 = 2$ δείξετε ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

8. Η συνάρτηση f με $f(x) = (\lambda - \frac{1}{\lambda} - x)(4-3x^2)$ με $\lambda \neq 0$ έχει ένα μόνο μέγιστο και ένα μόνο ελάχιστο. Σε συνέχεια δείξετε ότι $\max f - \min f = \frac{4}{9}(\lambda + \frac{1}{\lambda})^3$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x} + \frac{17}{4}$.
Να προσδιορίσετε τον πραγματικό a ώστε η f να έχει ακρότατο στη θέση $x = -\frac{1}{2}$.
Σε συνέχεια να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f.

10. Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ τέτοιο ώστε $f(0) = 0$ και το οποίο έχει τοπικά ακρότατα στις θέσεις $x = -\frac{7}{3}$ και $x = 1$.
Σε συνέχεια να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f.

11. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) f με $f(x) = \left(\frac{ae}{x}\right)^x$ με $x \in \mathbb{R}^*$

ii) f με $f(x) = (\eta\mu x)^{\eta\mu x}$, $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

iii) f με $f(x) = (a+x)\sqrt{-x^2+2ax+3a^2}$ με $a \in \mathbb{R}_+^*$ και $-a < x < 3a$

iv) f με $f(x) = \ln(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

v) f με $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1+\varepsilon\varphi x}$

vi) f με $f(x) = x\eta\mu(1+\ln x)$

12. Ποιός από τους κυλίνδρους που είναι εγγεγραμμένοι σε ορθό κώνο έχει τον μεγαλύτερο όγκο.

13. Ποιός από τους κυλίνδρους που είναι εγγεγραμμένοι σε

σφαίρα ακτίνας R έχει τον μεγαλύτερο όγκο.

14. Ποιό τραπέζιο εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο με μεγάλη βάση την διάμετρο $AB = 2R$ έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

15. Σε γνωστό κώνο να εγγραφεί άλλος ορθός κώνος με κορυφή το κέντρο της βάσης του αρχικού που να έχει τον μεγαλύτερο όγκο.

16. Να βρεθούν τα ακρότατα της f με $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x}}{1+x^2}$, $\lambda \neq 0, \pm 1$ για τις διάφορες τιμές του λ.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x^2+1}$

Δείξετε ότι $\forall\, x \in \mathbb{R}$ είναι: $\dfrac{2-4\sqrt{43}}{6} \leq f(x) \leq \dfrac{2+\sqrt{43}}{6}$

18. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $x^3-27x \geq -54$

19. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu x\,\eta\mu 2x \leq \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$

20. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ είναι $\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 2x \leq 1$

21. $\forall\, x \in (0,1)$ είναι: i) $1+x < e^x < \dfrac{1}{1-x}$

ii) $2\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right) < \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

22. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\sqrt[5]{1+x} - \dfrac{x}{5} \leq 1$

23. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ είναι $\sqrt[3]{1+x} - 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{9} > 0$

24. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ισχύει $x\ln x + e^{y-1} - xy \geq 0$

25. $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x \geq \dfrac{1}{2}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

26. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $0 \leq \dfrac{(x+\alpha)^2}{x^2+x+1} \leq \dfrac{4}{3}(\alpha^2-\alpha+1)$

27. Δείξετε τις ανισότητες

i) $2\sqrt{x}+\frac{1}{x} > 3, x \in (0,+\infty)$

ii) $x^3+3x+2+6x\ln x-6x^2 > 0,\ x \in (0,+\infty)$

iii) $x^8-x^5+x^2-x+1 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

28. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3-\alpha^2x+\alpha^2\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^*_-$ με πραγματικές ρίζες και διαφορετικές μεταξύ τους.

Δείξετε ότι $|\alpha|+\frac{3\sqrt{3}}{2}\beta > 0$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Δείξετε ότι $e^k > \kappa^e$.

30. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) f με $f(x) = (x-2)|x|$

ii) f με $f(x) = 2x-[2x]$

iii) f με $f(x) = |x-2|^3+|x-3|^3$

iv) f με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

31. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x) =$
$= e^x+e^{-x}-2\sigma\upsilon\nu x$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,\alpha] \to \mathbb{R}$ με $|f''(x)| \le \kappa$ $\forall\ x \in [0,\alpha]$. Αν το σημείο $\xi \in [0,\alpha]$ είναι θέση ακροτάτου δείξετε ότι $|f'(0)|+|f'(\alpha)| \le \alpha\kappa$.

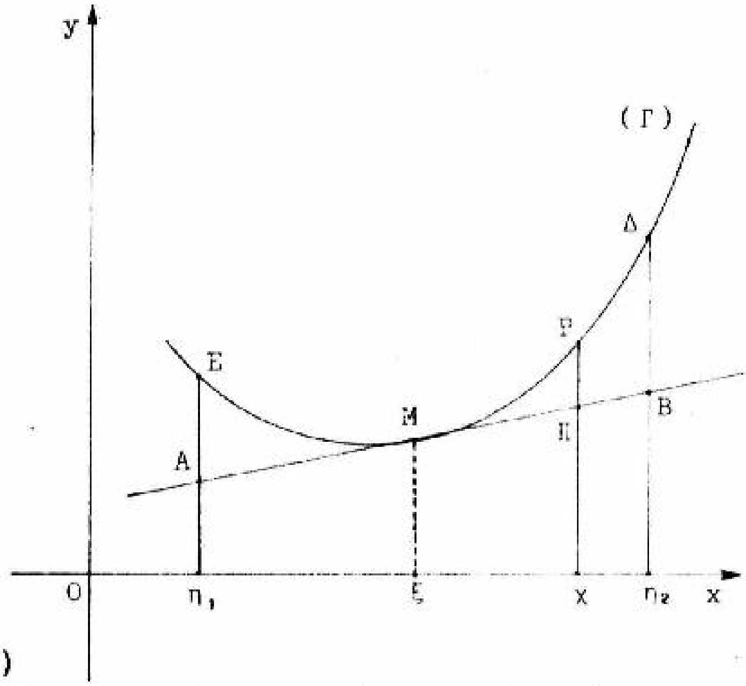
5.22. Κοίλα άνω και κάτω μιας συνάρτησης

Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ και ένα σημείο ξ εσωτερικό του Δ.

Υποθέτουμε ακόμη, ότι υπάρχει η πρώτη παράγωγος $f'(\xi)$ και η δεύτερη παράγωγος $f''(\xi)$ στην θέση $x = \xi \in \Delta$. Γνωρίζουμε ακόμη, ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος Γ της f, στο σημείο $[\xi,f(\xi)]$, είναι: $y-f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$.

Ορισμός 1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι κοίλη άνω στο

διάστημα Δ, όταν και μόνο όταν, η εφαπτομένη του διαγράμματος αυτής σε τυχαίο σημείο αυτού $[\xi, f(\xi)]$, βρίσκεται κάτω από αυτό με $\xi \in \Delta$.



Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ. Έτσι αν $\Delta = [\eta_1, \eta_2]$ και $\xi \in \Delta$, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος (Γ) στο σημείο $M[\xi, f(\xi)]$ θα είναι:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

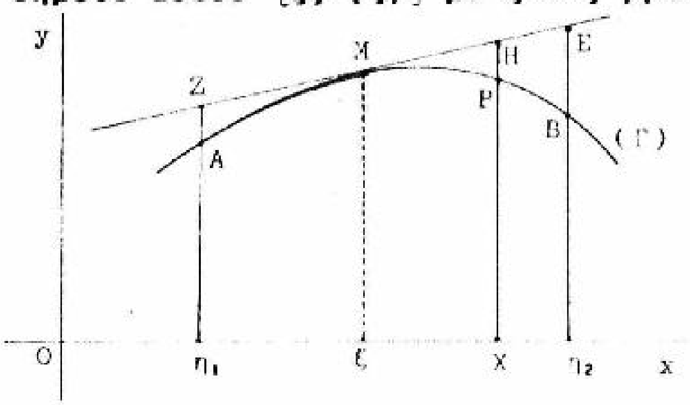
Έστω τώρα τυχαίο σημείο $x \in \Delta$. Η τεταγμένη του Ρ επί του (Γ) θα είναι $f(x)$ και η τεταγμένη του Π επί της εφαπτόμενης θα είναι y. Επειδή όμως η f είναι κοίλη άνω θα έχουμε:

$$f(x) > y \Longleftrightarrow f(x) > f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) \Longleftrightarrow f(x) - f(\xi) > f'(\xi)(x-\xi)$$
$\forall\ x \in \Delta - \{\xi\}$.

Και γενικότερα, αν x_1, x_2 δύο τυχαία στοιχεία του Δ με $x_1 \neq x_2$, θα ισχύει: η f κοίλη άνω στο $\Delta \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > f'(x_2)(x_1 - x_2)\ \ \forall\ x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 \neq x_2.$$

Ορισμός 2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι κοίλη κάτω στο διάστημα Δ, όταν και μόνο όταν, η εφαπτομένη του διαγράμματος αυτής, στο τυχαίο σημείο αυτού $[\xi, f(\xi)]$ με $\xi \in \Delta$, βρίσκεται πάνω από αυτό.



Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ.

Εργαζόμενοι τώρα

όπως και προηγουμένως, για ένα σημείο ξ Δ βρίσκουμε, αφού η f είναι κοίλη κάτω ότι θα ισχύει:

$$f(x)-f(\xi) < f'(\xi)(x-\xi) \ \forall \ x \in \Delta-\{\xi\}$$

και γενικώτερα αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ θα ισχύει:

η f κοίληκάτω στο $\Delta \rightarrow f(x_1)-f(x_2) < f'(x_2)(x_1-x_2) \ \forall \ x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$.

Πρόταση 1. Εάν για την συνάρτηση f υπάρχει η f'' και είναι πεπερασμένη $\forall \ x \in (\alpha,\beta) = \Delta$, τότε:

α) Εάν $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in \Delta$, τότε η f είναι κοίλη πάνω στο Δ

β) Εάν $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in \Delta$, τότε η f είναι κοίλη κάτω στο Δ.

Απόδειξη: α) Ας θεωρήσουμε δύο τιμές του x από το (α,β). Έστω τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ επειδή υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f $\forall \ x \in (\alpha,\beta)$, τότε θα υπάρχει και $\forall \ x \in [x_1, x_2]$.

Επειδή η f στο διάστημα $[x_1, x_2]$ πληροί τις υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμή, έπεται ότι θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ έτσι ώστε να ισχύει: $f(x_1)-f(x_2) = f'(\xi)(x_1-x_2)$ με $\xi \in (x_1, x_2)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f, δηλαδή την f', η οποία στο διάστημα $[x_1, \xi]$ πληροί τις υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, \xi)$ έτσι ώστε: $f'(\xi)-f'(x_1) = f''(\xi_1)(\xi-x_1) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow f'(\xi) = f'(x_1)+f''(\xi_1)(\xi-x_1).$$

Τότε όμως η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$f(x_1)-f(x_2) = f'(x_2)(x_1-x_2)+f''(\xi_1)(\xi-x_2)(x_1-x_2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(x_1)-f(x_2)-f'(x_2)(x_1-x_2) = f''(\xi_1)(\xi_1-x_1)(x_2-x_1)$$

Αλλά $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$, επομένως και $f''(\xi_1) > 0$ αφού $\xi_1 \in (x_1, \xi) \subset (\alpha,\beta)$ και επί πλέον $x_2 > x_1$ και $\xi > x_1$, οπότε: $f(x_2)-f(x_1)-f'(x_1)(x_2-x_1) > 0 \ \forall \ x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $x_1 < x_2$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο (α,β)

β) Όμοια αποδεικνύεται και ότι αν $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$, τότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο (α,β).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Εξετάσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε ποιά διαστήματα εί-

ναι κοίλες άνω ή κάτω.

α) $f(x) = 2x^3-4x^2$ **γ)** $f(x) = x+\frac{1}{x}$

β) $f(x) = \ln x$ **δ)** $f(x) = e^x$

Απάντηση: α) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η πρώτη παράγωγος είναι: $f'(x) = 6x^2-8x$ και οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 12x-8$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$.

Ρίζες της $f''(x) = 0$ είναι: $x = \frac{2}{3}$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η f θα είναι κυρτή $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο $f''(x)>0$, δηλαδή για $x>\frac{2}{3}$ και f κοίλη για $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο $f''(x)<0$, δηλαδή για $x<\frac{2}{3}$.

β) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$. Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{x}$ και $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}_+^*$. Επειδή όμως $f''(x)<0$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, έπεται ότι $\forall$ $x\in\mathbb{R}_+^*$ η f είναι κοίλη.

γ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\}$. Έχουμε $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\forall x\in\mathcal{D}(f)$.

Βρίσκουμε τώρα για ποιά $x\in\mathcal{D}(f)$ είναι $f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3}>0$ $\Leftrightarrow x>0$. Άρα η f είναι κυρτή $\forall$ $x\in(0,+\infty)$.

Και επειδή $f''(x)<0$ $\forall$ $x\in(-\infty,0)$ η f είναι κοίλη $\forall x\in(-\infty,0)$.

δ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Έχουμε $f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ και επειδή $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ είναι $f''(x)>0$, έπεται ότι η f είναι κυρτή $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. Βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f με $f(x) = x^4+\lambda x^3+\frac{3}{2}x^2+1$ είναι κοίλη άνω $\forall$ $x\in\mathbb{R}$.

Απάντηση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f''(x) = 12x^2+6\lambda x+3$. Εάν τώρα είναι $f''(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι κυρτή $\forall x\in\mathbb{R}$.

Για να είναι όμως $12x^2+6\lambda x+3>0$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί

$36\lambda^2-144 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2.$

Βασική παρατήρηση. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και ορισμένη σ'ένα διάστημα $\Delta = [\alpha,\beta]$ τότε ισχύουν:

i) Αν η f είναι κοίλη άνω $\forall\ \alpha,\beta \in \Delta \rightarrow \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f(\frac{\alpha+\beta}{2})$

ii) Αν η f είναι κοίλη κάτω $\forall\ \alpha,\beta \in \Delta \rightarrow \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leq$
$\leq f(\frac{\alpha+\beta}{2})$

Τα παραπάνω ισχύουν και για κάθε ν-άδα αριθμών που βρίσκονται στο Δ. Δηλαδή ισχύουν:

i) f κοίλη άνω στο $\Delta \rightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu} \geq$
$\geq f(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu})$, $x_1,x_2,\ldots,x_\nu \in \Delta$

ii) f κοίλη κάτω στο $\Delta \rightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu} \leq$
$\leq f(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu})$, $x_1,x_2,\ldots,x_\nu \in \Delta$

Με βάση την παρατήρηση αυτή μπορούμε να αποδείχνουμε ανισότητες αρκεί να μπορέσουμε να επιλέξουμε την κατάλληλη συνάρτηση f που θα είναι συνεχής και ορισμένη στο Δ.
Αναφέρουμε ενδεικτικά μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. **'Εστω $f(x) = x^\kappa / \kappa \geq 1$ και $x \geq 0$. Δείξετε ότι:**

$$\frac{\alpha^\kappa+\beta^\kappa}{2} \geq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^\kappa$$

Απάντηση: Επειδή $f'(x) = \kappa x^{\kappa-1}$ και $f''(x) = \kappa(\kappa-1)x^{\kappa-2}$ θα είναι $f''(x) \geq 0$, έπεται ότι η f είναι κοίλη άνω για $\kappa \geq 1$ και $x \geq 0$. Επομένως θα ισχύει:

$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f(\frac{\alpha+\beta}{2})$ με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$ δηλαδή:

$\frac{\alpha^\kappa+\beta^\kappa}{2} \geq (\frac{\alpha+\beta}{2})^\kappa$ με $\kappa \geq 1$.

Παράδειγμα 2. **'Εστω $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Δείξετε ότι:**

$$\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{2} \leq \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Απάντηση: 'Εχουμε: $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $f''(x) = -\eta\mu x \leq 0$

$\forall\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Επομένως η $f(x) = \eta\mu x$ είναι κοίλη κάτω στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και άρα: $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leq f(\frac{\alpha+\beta}{2})$ με $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, δηλαδή $\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{2} \leq \eta\mu\ \frac{\alpha+\beta}{2}$

Παράδειγμα 3. Εάν $f(x) = \ln x$ με $x > 0$. Δείξετε ότι: $\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \sqrt{\alpha\beta}$.

Απάντηση: Είναι: $f'(x) = \frac{1}{x}$ και $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ με $x > 0$ και επομένως η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι κοίλη κάτω στο $(0, +\infty)$.

Επομένως $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ ισχύει $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leq f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2} \leq \ln\frac{\alpha+\beta}{2} \leftrightarrow \ln\sqrt{\alpha\beta} \leq \ln(\frac{\alpha+\beta}{2}) \leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \sqrt{\alpha\beta}$$

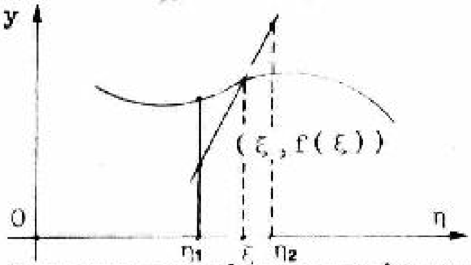
Η σχέση γενικεύεται με επαγωγή για τους αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in \mathbb{R}_+$ και γίνεται:

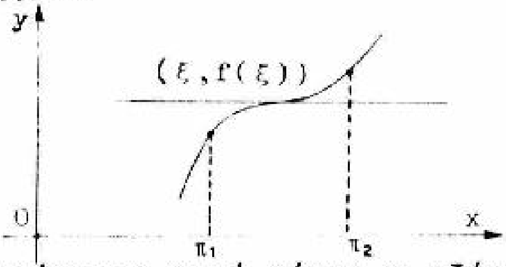
$$\ln\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu} \geq \frac{\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_\nu}{\nu} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{x_1 x_2 \ldots x_\nu} \quad \text{(ανισότητα Cauchy)}$$

5.23. Σημεία καμπής συνάρτησης.

Ορισμός. Μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα (α,β) θα λέμε ότι έχει σημείο καμπής το σημείο $[\xi, f(\xi)]$, με $\xi \in (\alpha,\beta)$ του διαγράμματος αυτής, όταν και μόνο όταν, αυτή είναι κοίλη κάτω, αντίστοιχα άνω, στο διάστημα (α,ξ) και κοίλη άνω, αντίστοιχα κάτω, στο διάστημα (ξ,β).





Η γεωμετρική ερμηνεία για την περίπτωση αυτή είναι η εξής:

Η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αυτού, διαπερνά το διάγραμμα της f, όπως στα παραπάνω σχήματα.

Για την έρευνα των παραπάνω για μια συνάρτηση f μας βοηθούν πολύ οι παρατηρήσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Εάν η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο $\xi \in (\alpha,\beta)$, όπως συμβαίνει αν υπάρχει η τρίτη παράγωγος της f στο ξ, τότε η f'' επειδή είναι συνεχής, παραμένει θετική, αντίστοιχα αρνητική σε μια περιοχή $\pi(\xi) \subsetneqq (\alpha,\beta)$ του ξ.

2. Εάν στην θέση $x = \xi \in \Delta$ είναι $f''(\xi) = 0$ ενώ $f'''(\xi) \neq 0$, τότε το σημείο $[\xi, f(\xi)]$ είναι σημείο καμπής της f.

Πράγματι αν $f'''(\xi) > 0$, τότε η f'' ανέρχεται στην θέση $x = \xi$, δηλαδή έχουμε: $f''(x) < f''(\xi) = 0 \ \forall \ x \in (\xi-\varepsilon, \xi)$

και $f''(x) > f''(\xi) = 0 \ \forall \ x \in (\xi, \xi+\varepsilon)$

Αυτό όμως σημαίνει, ότι η f είναι κοίλη στο $(\xi-\varepsilon, \xi)$ και κοίλη άνω στο $(\xi, \xi+\varepsilon)$ που σημαίνει ότι το σημείο $[\xi, f(\xi)]$ είναι σημείο καμπής της f.

Μ'αυτήν την εργασία βρίσκουμε, ότι το $[\xi, f(\xi)]$ είναι επίσης σημείο καμπής της f, όταν $f'''(\xi) < 0$.

3. Εάν δεν υπάρχει η παράγωγος f'' στην θέση $x = \xi \in \Delta$, εξετάζουμε το πρόσημο της f'' στην περιοχή του σημείου ξ. Και αν είναι $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (\xi-\varepsilon, \xi)$ και $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in (\xi, \xi+\varepsilon)$, τότε προφανώς το $[\xi, f(\xi)]$ είναι σημείο καμπής της f.

Όμοια αν $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in (\xi-\varepsilon, \xi)$ και $f''(x) < 0$ $\forall \ x \in (\xi, \xi+\varepsilon)$ έχουμε σημείο καμπής.

Μετά από τα παραπάνω, όταν η f είναι συνεχής και η f'' εκατέρωθεν του ξ αλλάζει πρόσημο, τότε αναγκαστικά θα έχουμε: $f''(\xi) = 0$.

Ώστε αναγκαία συνθήκη, για να είναι το σημείο $[\xi, f(\xi)]$ σημείο καμπής είναι όπως $f''(\xi) = 0$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει, δηλαδή αν $f''(\xi) = 0$ δεν σημαίνει αναγκαστικά, ότι το $[\xi, f(\xi)]$ είναι και σημείο καμπής.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^6$. Είναι το σημείο $x = 0$ σημείο καμπής;

Απάντηση: Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Έχουμε $f'(x) = 6x^5$ και

$f''(x) = 30x^4$ και προφανώς $f''(0) = 0$. Αλλά το σημείο (0,0) δεν είναι σημείο καμπής της f αφού εκατέρωθεν του $x = 0$ είναι $f''(x) > 0$ και συνεπώς στην περιοχή του μηδενός η f είναι κοίλη άνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Βρείτε τα σημεία καμπής των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x^5-3x^4+3$ **β)** $f(x) = \ln x$

γ) $f(x) = e^{-x^2}$ **δ)** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Απάντηση: α) Έχουμε: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η πρώτη παράγωγος είναι: $f'(x) = 10x^4-12x^3$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι $f''(x) = 40x^3-36x^2$. Οι ρίζες της $f''(x) = 0$ είναι οι $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{9}{10}$. Ώστε πιθανά σημεία καμπής είναι τα $x = 0$ και $x = \frac{9}{10}$. Επειδή για $x = 0$ έχουμε:

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -72 < 0$

η f για $x = 0$ παρουσιάζει μέγιστο.

Για $x = \frac{9}{10}$ έχουμε σημείο καμπής, γιατί για $x > \frac{9}{10}$ είναι $f''(x) > 0$ και για $0 < x < \frac{9}{10}$ είναι $f''(x) < 0$. Δηλαδή η f'' εκατέρωθεν του $\frac{9}{10}$ (περιοχής του $\frac{9}{10}$) αλλάζει πρόσημο

β) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$. Η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$ και η δεύτερη $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ρίζες της $f''(x) = 0$ δεν υπάρχουν. Άρα ούτε σημεία καμπής.

γ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x) =$ $= -2e^{-x^2}$ και η δεύτερη $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$.

Ρίζες της $f''(x) = 0$ είναι οι $x_1 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, επειδή τότε εκατέρωθεν του $\frac{\sqrt{2}}{2}$, όσο και του $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, η f'' αλλάζει πρόσημο, έπεται ότι σε κάθε μια από τις θέσεις αυτές έχουμε και σημείο καμπής.

δ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x) =$

$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ και η δεύτερη είναι:

$f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^2}$. Οι ρίζες της $f''(x) = 0$ είναι οι $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$.

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν καθενός από αυτά, έπεται ότι η f σε κάθε μια θέση από αυτές παρουσιάζει και σημείο καμπής. Τα σημεία αυτά είναι τα:

$$(0,0),\ (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ και } (-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4})$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$ Δείξετε ότι για να παρουσιάζει το διάγραμμά της σημεία καμπής πρέπει $3\beta^2 > 8\alpha\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

Λύση: Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f γιατί τα σημεία καμπής βρίσκονται στις ρίζες της δεύτερης παραγώγου εφ'όσο προ και μετά αυτών αλλάζει πρόσημο η δεύτερη παράγωγος.

Είναι: $f'(x) = 4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta$ και $f''(x) = 12\alpha x^2+6\beta x+2\gamma$ και θα πρέπει η εξίσωση $f''(x) = 0$ να δώσει πραγματικές και διαφορετικές ρίζες.

Συνθήκη γιαυτό είναι η διακρίνουσα της να είναι θετική. Δηλαδή $\Delta > 0 \Rightarrow 9\beta^2-24\alpha\gamma > 0 \Rightarrow 3\beta^2 > 8\alpha\gamma$.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Δείξετε ότι αυτή έχει τρία σημεία καμπής συνευθειακά.

Απάντηση: Η πρώτη παράγωγος είναι: $f'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = \frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^2}$

Οι ρίζες της $f''(x) = 0$ είναι $x_1 = 1$, $x_2 = -2-\sqrt{3}$, $x_3 = -2+\sqrt{3}$. Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
f''		−	0	+	0	−	0	+	
Συμπερ.		κοίλη	Σ.Καμ.	κυρτή	Σ.Καμ.	κοίλη	Σ.Καμ.	Κυρτή	

Ώστε υπάρχουν τρία σημεία καμπής τα

$M_1(-2-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4})$, $M_2(-2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$, $M_3(1,1)$.

Η εξίσωση της ευθείας της διερχομένης από τα M_1, M_2 είναι:

$$\frac{x-(-2-\sqrt{3})}{(-2-\sqrt{3})-(-2+\sqrt{3})} = \frac{y-(-\frac{\sqrt{3}-1}{4})}{(-\frac{\sqrt{3}-1}{4})-(\frac{1+\sqrt{3}}{4})}$$

που εύκολα επαληθεύεται ότι το σημείο $M_3(1,1)$ βρίσκεται σ' αυτήν.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x\eta\mu(\ln x)$ και $\mathcal{D}(f) = (0,+\infty)$. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη άνω ή κοίλη κάτω και τα σημεία καμπής.

Απάντηση: Έχουμε $f'(x) = \eta\mu(\ln x)+\sigma\upsilon\nu(\ln x)$ και $f''(x) = \frac{1}{x}[\sigma\upsilon\nu(\ln x)-\eta\mu(\ln x)] = \frac{\sqrt{2}}{x}\eta\mu(\frac{\pi}{4}-\ln x)$.

Η $f''(x) = 0$ έχει ρίζες τις $x_\kappa = e^{\kappa\pi+\frac{\pi}{4}}$ με $\kappa \in Z$.

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο στην περιοχή καθενός από τα σημεία x_κ, έπεται ότι στις θέσεις x_κ έχουμε σημείο καμπής.

Επειδή $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu(\frac{\pi}{4}-\ln x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu(\ln x-\frac{\pi}{4}) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\kappa\pi-\pi < \ln x-\frac{\pi}{4} < 2\kappa\pi \Leftrightarrow 2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4} < \ln x < 2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4}} < x < e^{2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}}$ έπεται ότι καθένα διάστημα της μορφής: $(e^{2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4}}, e^{2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}})$ (με $\kappa \in Z$) η f είναι κυρτή. Όμοια βρίσκουμε, ότι $f''(x) < 0$, σε κάθε ένα διάστημα της μορφής $(e^{2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}}, e^{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}})$ και η f σ' αυτά είναι κοίλη.

5.24. Μελέτη συνάρτησης.

Με την βοήθεια όλων των προηγουμένων που μάθαμε μπορούμε τώρα να μελετήσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την συμπεριφορά μιας συνάρτησης σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Η πορεία που ακολουθούμε περιλαμβάνει τα παρακάτω στάδια.

Εργασία πρώτη. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, εφ' όσον εννοείται δεν δίνεται αυτό. Γιατί είναι δυνατόν να

θέλουμε να μελετήσουμε μια συνάρτηση μόνο σ'ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

Εργασία δεύτερη. Βρίσκουμε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή ή περιοδική, τότε αν είναι άρτια η μελέτη γίνεται στο $[0,+\infty)$ υποσύνολο του $\mathscr{D}(f)$ και έχει άξονα συμμετρίας τον y

Αν είναι περιττή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Και αν είναι περιοδική η μελέτη γίνεται στο διάστημα μιας περιόδου.

Εργασία τρίτη. Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες (εφ'όσον υπάρχουν) του διαγράμματος της συνάρτησης. Γιαυτό αναζητάμε:

α) Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες δηλαδή αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to\xi+0} f(x)$ και είναι αυτά $\pm\infty$. Τότε η $x = \xi$ είναι μια κατακόρυφη ασύμπτωτη. (Βλέπετε για λεπτομέρειες την αντίστοιχη παράγραφο)

β) Τις οριζόντιες ασύμπτωτες, δηλαδή αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda\in\mathbb{R}$. Τότε η $y = \lambda$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Τις πλάγιες ασύμπτωτες, δηλαδή αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\alpha x] = \beta$, εννοείται χωριστά για $x\to+\infty$ και $x\to-\infty$, οπότε η ευθεία $y = \alpha x+\beta$ είναι μια πλάγια ασύμπτωτη (Λεπτομέρειες στην αντίστοιχη παράγραφο)

Εάν η συνάρτηση είναι συνεχής $\forall\, x\in\mathbb{R}$ δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Εργασία τέταρτη. Βρίσκουμε σε ποιά σημεία η συνάρτηση είναι δυνατόν να παρουσιάζει ακρότατα. Τα σημεία αυτά τα αναζητάμε:

α) Μεταξύ των σημείων, όπου η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο.

β) Μεταξύ των σημείων, όπου μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος.

Για την περίπτωση (α) θα πρέπει να καταφύγουμε στον ορισμό του ακροτάτου, ενώ για την περίπτωση (β) εξετάζουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου αριστερά και δεξιά του σημείου που αναφέρουμε και εφ'όσον έχουμε αλλαγή πρόσημου,έχουμε εκεί και ακρότατο. Την περίπτωση (β) μπορούμε να μελετήσου-

με και ως εξής: Βρίσκουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο σημείο αυτό και αν η δεύτερη παράγωγος στο σημείο αυτό είναι θετική έχουμε ελάχιστο, αν δε αρνητική, έχουμε μέγιστο.

Εάν στο σημείο αυτό συμβαίνει να μηδενίζεται και η δεύτερη παράγωγος και εκατέρωθεν του σημείου η δεύτερη παράγωγος αλλάζει πρόσημο, το σημείο αυτό είναι σημείο καμπής, ενώ αν δεν αλλάζει πρόσημο, είναι σημείο ακροτάτου.

Εργασία πέμπτη. Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, δηλαδή τα διαστήματα μέσα στα οποία η συνάρτηση, είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Για να βρούμε τα διαστήματα αυτά μελετάμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου.

Γνωρίζουμε ότι εάν η πρώτη παράγωγος είναι θετική σ' ένα διάστημα, η συνάρτηση είναι αύξουσα σ'αυτό γνήσια και αν αρνητική, η συνάρτηση είναι φθίνουσα γνήσια.

Εργασία έκτη. Βρίσκουμε τα σημεία καμπής του διαγράμματος της συνάρτησης. Θα αναζητήσουμε αυτά μεταξύ των ριζών της δεύτερης παραγώγου.

Από τις ρίζες αυτές σημείο καμπής είναι εκείνο για το οποίο η δεύτερη παράγωγος αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού όπως είδαμε και παραπάνω.

Εργασία έβδομη. Βρίσκουμε σε ποια διαστήματα η συνάρτηση, είναι κυρτή και σε ποιά είναι κοίλη. Γνωρίζουμε, ότι αυτό, προκύπτει από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.Αν αυτή είναι θετική σ'ένα διάστημα, τότε η συνάρτηση σ'αυτό είναι κυρτή, ενώ αν είναι αρνητική, είναι σ'αυτό κοίλη.

Εργασία όνδοη. Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία το διάγραμμα της συνάρτησης τέμνει τον άξονα των x (ή αν χρειάζεται και τον άξονα των y). Αυτά είναι τα σημεία για τα οποία μηδενίζεται η συνάρτηση. Επίσης βρίσκουμε και τα διαστήματα για τα οποία η συνάρτηση παίρνει τιμές θετικές και εκείνα για τα οποία παίρνει τιμές αρνητικές.

Εργασία ένατη. Καταστρώνουμε πίνακα των μεταβολών της συνά-

ρτησης για να συγκεντρώσουμε σ'αυτόν όλα τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Εργασία δέκατη. Με την βοήθεια του πίνακα που καταστρώσαμε χαράζουμε σε σύστημα αξόνων ορθογώνιων το διάγραμμα της συνάρτησης ή και όπως αλλιώς λέμε την γραφική της παράσταση.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-4}}$

Λύση: 1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathscr{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}: \frac{x}{x-4} \geq 0\}$ $= (-\infty, 0] \cup (4, +\infty)$.

2. Η f δεν είναι άρτια, ούτε περιττή ούτε περιοδική.

2. **Ασύμπτωτες** α) Οριζόντιες η x = 4 γιατί $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{\frac{x}{x-4}} = +\infty$

β) Κατακόρυφες η x = 1 γιατί $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x}{x-4}} = 1$

4. **Ακρότατα.** Είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x-4}}} \left(\frac{x}{x-4} \right)' = - \frac{2}{\sqrt{x(x-4)^3}}$

και επειδή $f'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \mathscr{D}(f)$ η f δεν έχει ακρότατα.

5. **Μονοτονία.** Επειδή $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in \mathscr{D}(f)$ η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathscr{D}(f)$.

6. **Σημεία καμπής.** Βρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο της f και είναι $f''(x) = \frac{4(x-1)}{\sqrt{x^3(x-4)^5}}$ που έχει μοναδική ρίζα την x = 1 $\notin \mathscr{D}(f)$. Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.

7. **Κοίλα της f.** Επειδή για $x \leq 0$ είναι $f''(x) \leq 0$ η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και για $x \geq 4$ είναι $f''(x) > 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(4, +\infty)$.

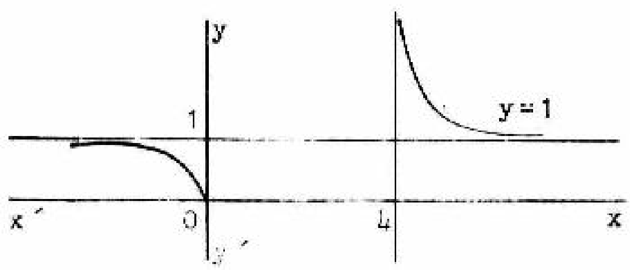
8. **Σημεία τομής με τους άξονες.**
Με $x = 0 \rightarrow y = 0$. Άρα η f διέρχεται από την αρχή.

9. **Όρια της f στο 0^-.**
Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

10. **Πίνακας μεταβολών της f.**

x	−∞ … 0	0 … 4	4 … +∞
f′	−	//////	−
f″	−	//////	+
f	κοίλη	//////	κοίλη άνω

11. **Γραφική της f**



Θέμα 2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

Απάντηση: α) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Επίσης είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

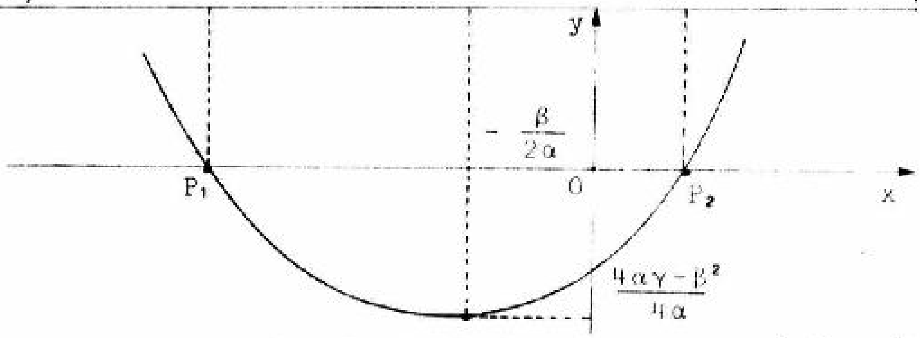
β) Αφού είναι συνεχής δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες. Για $x \to -\infty$ και $\alpha > 0$, $f(x) \to +\infty$ και για $\alpha < 0$, $f(x) \to -\infty$. Όμοια αν $x \to -\infty$ και $\alpha > 0$, $f(x) \to -\infty$, ενώ αν $\alpha < 0$, $f(x) \to -\infty$.

Επίσης επειδή δεν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ δεν υπάρχουν ούτε οριζόντιες, ούτε πλάγιες ασύμπτωτες. Απλώς παρατηρούμε ότι έχει κλάδους στο άπειρο.

γ) Η παράγωγος είναι $f'(x) = 2\alpha x+\beta$. Ρίζα της παραγώγου είναι η $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

1) Είναι $f'(x) > 0$ για $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$ και $f'(x) < 0$ για $x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ αν $\alpha > 0$ και επομένως το $\frac{-\beta}{2\alpha}$ είναι θέσις ελάχιστου, ενώ αν $\alpha < 0$ είναι θέση μεγίστου, γιατί $f'(x) < 0$ για $x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ και $f'(x) < 0$ για $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$.

x	$-\infty$		P_1		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		P_2		$+\infty$
f′			−		0	+			
f″			+		+		+		
f	$+\infty$	↘	0	↘	$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$	γ ↗	0	↗	$+\infty$
Συμπ		◡		◡	Απολ.ελαχ.	◡		◡	



2) Ή και ως εξής: Επειδή $f''(x) = 2\alpha$, αν $\alpha > 0$ θα είναι $f''\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = 2\alpha > 0$, άρα θέση ελάχιστου και αν $\alpha < 0$ θα είναι

$f''(\frac{-\beta}{2\alpha}) = 2\alpha < 0$ είναι θέση μέγιστου.

δ) Επειδή για $\alpha > 0$ είναι $f'(x) > 0$ για $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$ και $f'(x) <$ < 0 για $x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ θα είναι: f γνήσια αύξουσα στο $(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty)$ και f γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha})$.

Ενώ αν $\alpha < 0$ θα είναι f γνήσια αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$ και f γνήσια φθίνουσα στο $(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty)$.

ε) Σημεία καμπής δεν υπάρχουν αφού $f''(x) = 2\alpha \neq 0$.

στ) Επειδή αν $\alpha > 0$ είναι $f''(x) = 2\alpha > 0$ η f είναι κυρτή στο $\mathcal{D}(f)$, δηλαδή στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, ενώ αν $\alpha < 0$ είναι $f''(x) = 2\alpha < 0$ και είναι κοίλη, δηλαδή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

ζ) Οι ρίζες της $f(x) = 0$ είναι πραγματικές αν $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ και επομένως υπάρχουν δύο διακεκριμένα σημεία τομής του διαγράμματος αυτής με τον άξονα του x. Αν $\Delta = 0$ εφάπτεται του άξονα των x και αν $\Delta < 0$ δεν υπάρχει κανένα σημείο κοινό του διαγράμματος αυτής με τον άξονα των x. Για $x = 0$ έχουμε $y = f(x) =$ $= \gamma$ και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, \gamma)$.

η) Μετά από τα παραπάνω έχουνε τον παραπάνω πίνακα μεταβολών της συνάρτησης και μαζί μ'αυτόν και την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Ο πίνακας αντιστοιχεί σε $\alpha > 0$ και $\Delta > 0$ και ρίζες ρ_1, ρ_2.

Θέμα 3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.
Η μελέτη να γίνει επί του συγκεκριμένου θέματος $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2$.

Λύση: α) έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$

Ρίζες της $f(x) = 0$ είναι οι $x = \pm 1$ και $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Δηλαδή το διάγραμμα της f τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1$.

Για $x = 0$ έχουμε $y = f(0) = 2$ και το διάγραμμα τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, 2)$.

β) Λόγω της συνέχειας της f δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επίσης επειδή για $x \to \pm\infty$ δεν έχουμε $f(x) \to +\infty$ έπεται ότι δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες και επειδή

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ δεν υπάρχουν ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.

γ) Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = 12x^3 - 10x$ και οι ρίζες αυτής είναι: $0, -\sqrt{\frac{5}{6}}, +\sqrt{\frac{5}{6}}$.

Βρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο η οποία είναι: $f''(x) =$
$= 36x^2 - 10$.

Παρατηρούμε,ότι: $f''(0) = -10 < 0$, $f''(-\sqrt{\frac{5}{6}}) = f''(+\sqrt{\frac{5}{6}}) =$

$= 20 > 0$. Επομένως στο σημείο 0 έχουμε τοπικό μέγιστο και στα σημεία $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ και $+\sqrt{\frac{5}{6}}$ έχουμε τοπικά ελάχιστα.

δ) Για την εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας παρατηρούμε,ότι είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 10x > 0 \Leftrightarrow$

$x \in (-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty)$, ενώ $f'(x) < 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}) \cup$

$\cup (0, -\sqrt{\frac{5}{6}})$. Επομένως η f γνησίως αύξουσα στο $(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0) \cup$

$\cup (\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty)$ και f γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}) \cup (0, +\sqrt{\frac{5}{6}})$

ε) Σημεία καμπής θα βρεθούν μεταξύ των ριζών της δεύτερης παραγώγου, που είναι οι $\pm\sqrt{\frac{5}{18}}$.

Έχουμε: $f''(x) > 0$ για $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{5}{18}}) \cup (+\sqrt{\frac{5}{18}}, +\infty)$ και

$f''(x) < 0$ για $x \in (-\sqrt{\frac{5}{18}}, +\sqrt{\frac{5}{18}})$ και επομένως για $x = -\sqrt{\frac{5}{18}}$

και $x = +\sqrt{\frac{5}{18}}$ έχουμε σημεία καμπής.

στ) Τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη τα βρίσκουμε επίσης από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.

Προφανώς βάσει του προηγούμενου, στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{18}})$

και $(+\sqrt{\frac{5}{18}}, +\infty)$ η f είναι κυρτή ενώ στο διάστημα

$(-\sqrt{\frac{5}{18}}, +\sqrt{\frac{5}{18}})$ η f είναι κοίλη.

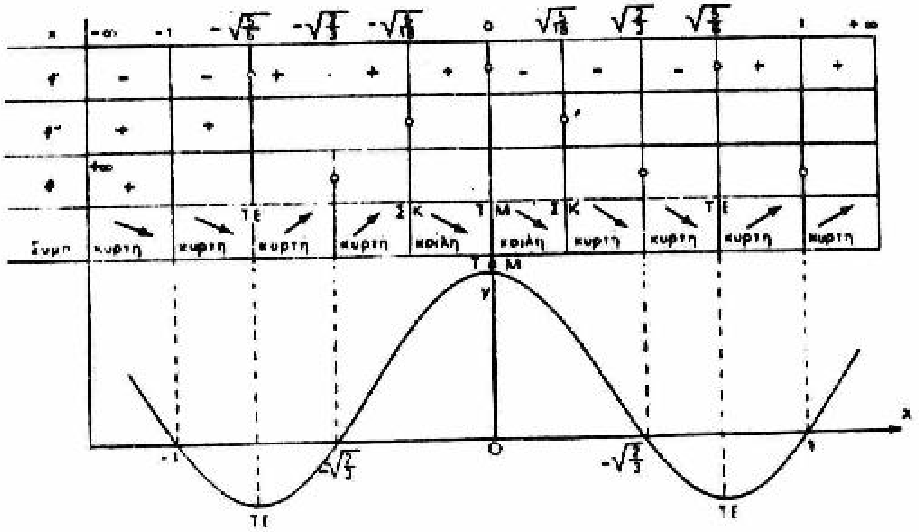
ζ) Βρίσκουμε τώρα τα διαστήματα στα οποία είναι $f(x) > 0$ και εκείνα στα οποία η $f(x) < 0$.

Είναι $f(x) > 0$ για $x \in (-\infty, -1) \cup (-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (1, +\infty)$ και

$f(x) < 0$ για $x \in (-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}}, 1)$.

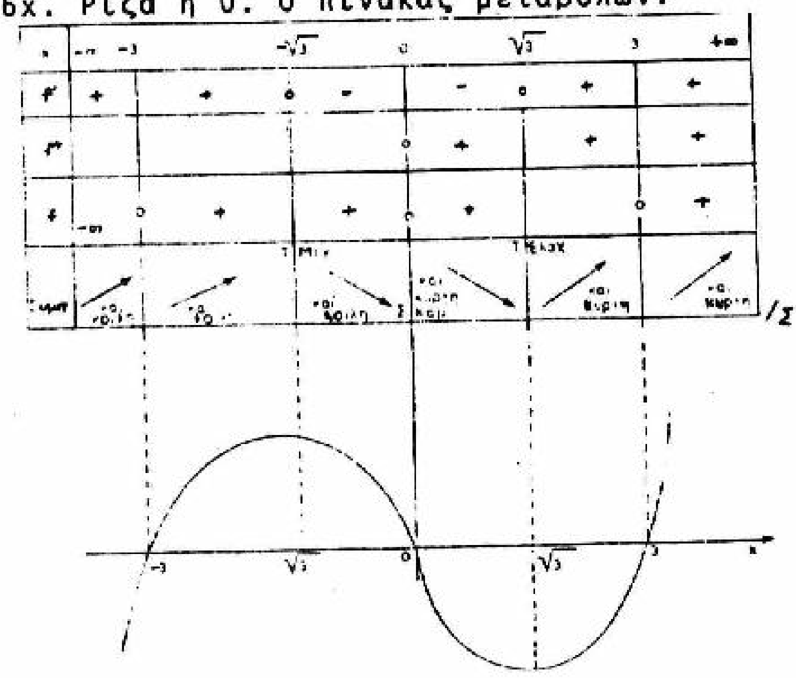
η) Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα των μεταβολών μαζί και το διάγραμμα αυτής.

Σημείωση: Επειδή η f είναι άρτια, θα μπορούμε να μελετήσουμε αυτή στο $[0, +\infty)$.



Θέμα 4. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 9x$ και να παρασταθεί γραφικά.

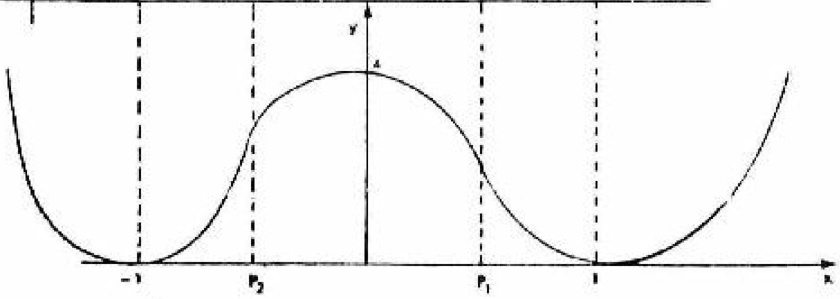
Λύση: Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και ρίζες της $f(x) = 0$ οι $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Η παράγωγος είναι $f'(x) = 3x^2 - 9$. Ρίζες της $f'(x) = 0$, οι $-\sqrt{3}$ και $+\sqrt{3}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 6x$. Ρίζα η 0. Ο πίνακας μεταβολών:



Θέμα 5. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο:
$f(x) = x^6+2x^4-7x^2+4$.

Λύση: α) Πεδίο ορισμού τής f είναι το $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
β) Επειδή η f περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις της μεταβλητής είναι άρτια, δηλαδή ισχύει $f(-x) = f(x)$. Ρίζες οι: ± 1 και $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.
γ) Επειδή είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$ δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επειδή του $x \to +\infty$ και $f(x) \to +\infty$ δεν υπάρχουν ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες ούτε πλάγιες.
δ) Η παράγωγος τής f είναι: $f'(x) = 6x^5+8x^3-14x$. Έχουμε $f'(x) = 0 \iff x(3x^4+4x^2-7) = 0$. Επομένως κρίσιμα σημεία είναι τα: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 30x^4+24x^2-14$ και οι ρίζες αυτής είναι: $\pm\sqrt{\frac{-6+\sqrt{141}}{15}}$ τις ονομάζουμε ρ_1, ρ_2
ε) Καταστρώνουμε τον σχετικό πίνακα από τον οποίο καθορίζεται πλήρως η μελέτη της συνάρτησης.

x	−∞		−1		ρ_2		0		ρ_1		+1		+∞
f'		−	0	+		+	0	−		−	0	+	
f''		+		+	0	−		−	0	+		+	
f	+∞	+	0	+		+		+		+	0	+	
		κυρτή ↘	τοπ Ελ	κυρτή ↗	Σ Καμ	κοίλη ↗	Τ Μεγ	κοίλη ↘	Σ Καμ	κυρτή ↘	Τ Ελ	κυρτή ↗	



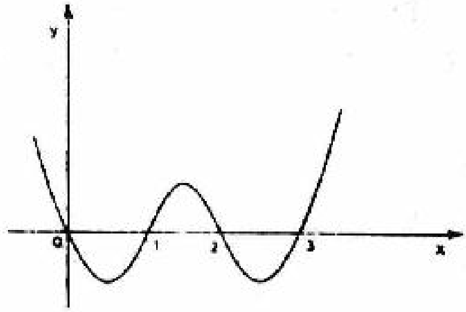
Θέμα 6. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με
$f(x) = \frac{1}{24}\, x(x-1)(x-2)(x-3)$ και να γίνει το διάγραμμά της.

Λύση: 1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

2. Δεν είναι συμμετρική ως προς τους άξονες ή την αρχή.

3. Τέμνει τον άξονα των x στα σημεία 0,1,2,3.

4. Δεν έχει ασύμπτωτες.



5. Είναι $f'(x) = \frac{1}{12}(2x^3-9x^2+11x-3)$

Ρίζες αυτής: $\frac{3}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

6. Είναι $f''(x) = \frac{1}{12}(6x^2-18x+11)$

Ρίζες αυτής $\frac{9\pm\sqrt{15}}{6}$

7. Επειδή $f''(\frac{3}{2}) < 0$ στο σημείο $M(\frac{3}{2}, \frac{3}{128})$ παρουσιάζει μέγιστο ενώ στα σημεία $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ παρουσιάζει ελάχιστα.

8. Σημεία καμπής στις θέσεις $x_1 = \frac{9-\sqrt{15}}{6}$ και $x_2 = \frac{9+\sqrt{15}}{6}$

9. Για $x \to \pm\infty$ $f(x) \to -\infty$.

10. Γραφική παράσταση πρόχειρη.

Θέμα 7. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ και να γίνει το διάγραμμά αυτής.

Λύση: 1. Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0,1,2\}$.

2. Οι ευθείες $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες. Και επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη (δηλαδή ο άξονας των x).

3. Τομές του διαγράμματος της f με τον άξονα των x οι ρίζες της $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+2 = 0$.

4. Είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$ και επειδή $f'(x)<0$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ είναι η f γνήσια φθίνουσα στο $\mathcal{D}(f)$.

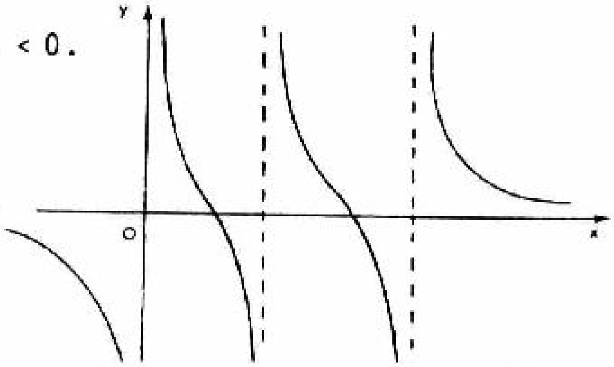
5. Είναι $f''(x) = 2(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^3})$ και η $f''(x)=0$ είναι έκτου βαθμού. Επειδή για $x > 2$ είναι $f''(x) > 0$ και για $x < 0$ είναι $f''(x) < 0$ έπεται ότι μεταξύ 0 και 2 βρίσκονται όλες οι υπάρχουσες πραγματικές ρίζες της $f''(x) = 0$.

Επειδή για $x \to 0+0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \to +\infty$ είναι $f''(x) > 0$ και για $x \to 1^-$

$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)^3} \to -\infty$ είναι $f''(x) < 0$.

Έπεται ότι μεταξύ 0 και 1 υπάρχει σημείο καμπής. Επίσης και μεταξύ 1 και 2 υπάρχει σημείο καμπής.

Γραφική παράσταση:



Θέμα 8. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{\eta\mu 2x}{2}$

Λύση: 1. Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

2. Δεν είναι άρτια ούτε περιττή.

3. Είναι περιοδική με περίοδο π γιατί ισχύει $f(x+\pi) =$

$= \sigma\upsilon\nu^2(x+\pi) + \frac{\eta\mu(2x+2\pi)}{2} = (-\sigma\upsilon\nu x)^2 + \frac{\eta\mu 2x}{2} = \sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{\eta\mu 2x}{2} = f(x)$

Είναι επομένως αρκετό να μελετήσουμε την f στο διάστημα $[0,\pi]$.

4. Ασύμπτωτες δεν υπάρχουν γιατί η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

5. **Ακρότατα-μονοτονία.** Πιθανές θέσεις ακροτάτων είναι οι ρίζες της πρώτης παραγώγου. Είναι $f'(x) = -2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x =$
$= \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 2x$ με ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης

$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu(2x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm (-2x - \frac{\pi}{2}),\ \kappa \in Z$

Με $\kappa = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \in [0,\pi]$.

Με $\kappa = +1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{8} \in [0,\pi]$.

Επειδή δε όταν $0 < x \le \frac{\pi}{8} \Rightarrow f'(x) > 0$ και η f είναι ↑ στο

$(0, \frac{\pi}{8}] \cup [\frac{5\pi}{8}, \pi]$ και η f είναι ↓ στο $(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8})$ επομένως

στη θέση $x = \frac{\pi}{8}$ και $x = \frac{5\pi}{8}$ η f έχει ακρότατα μέγιστο για

$x = \frac{\pi}{8}$ το $f(\frac{\pi}{8}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ και ελάχιστο για $x = \frac{5\pi}{8}$ το

$f(\frac{5\pi}{8}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

6. Σημεία καμπής είναι οι ρίζες της δεύτερης παραγώγου.
Είναι $f''(x) = -2(\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x)$ και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x =$

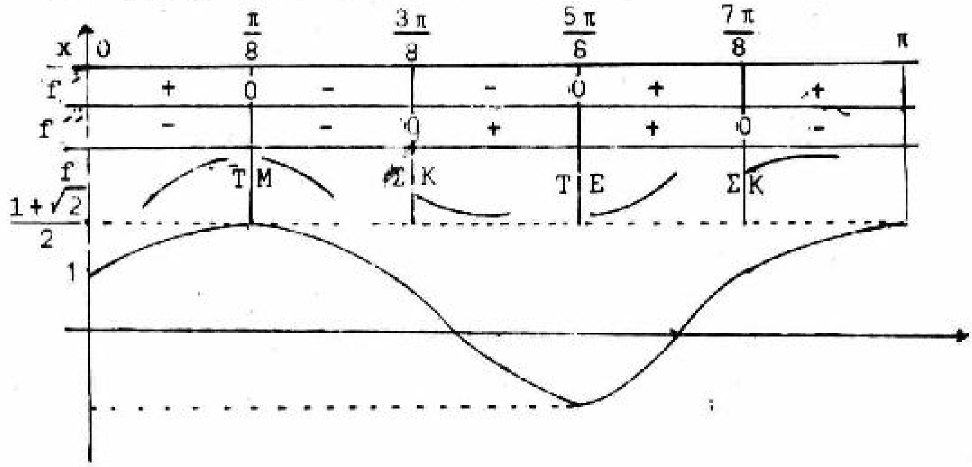
$= -\eta\mu 2x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x = -1 = \varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \{2x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in Z\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{x = \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \kappa \in Z\} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8}$ και $x = \frac{7\pi}{8}$ που είναι σημεία καμπής της f.

7. Κοίλα της f. Επειδή με $x \in (0, \frac{3\pi}{8}) \cup (\frac{7\pi}{8}, \pi)$ είναι $f''(x) < 0$ επομένως η f είναι κοίλη κάτω και $f''(x) > 0$ για $x \in (\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8})$ που σημαίνει ότι η f είναι κοίλη άνω.

8. Η f συναντά τον άξονα x στα σημεία $(\frac{\pi}{2}, 0)$ και $(\frac{3\pi}{4}, 0)$

9. Πίνακας μεταβολών της f και η γραφική παράσταση μέσα στο $[0,\pi]$ είναι ο παρακάτω.



Θέμα 9. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2-\sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση: 1. Η f έχει πεδίο ορισμού το **R** γιατί $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $2-\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

2. Έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων γιατί ισχύει $f(-x) = \frac{\eta\mu(-x)}{2-\sigma\upsilon\nu(-x)} = \frac{-\eta\mu x}{2-\sigma\upsilon\nu x} = -f(x)$ (Δηλαδή είναι περιττή)

3. Είναι περιοδική με περίοδο το 2π γιατί ισχύει $f(x+2\pi) = \frac{\eta\mu(x+2\pi)}{2-\sigma\upsilon\nu(x+2\pi)} = \frac{\eta\mu x}{2-\sigma\upsilon\nu x} = f(x)$. Άρα είναι αρκετό να την μελετήσουμε στο διάστημα $[0,\pi]$.

4. Επειδή είναι συνεχής στο **R** δεν έχει ασύμπτωτες.

5. Ακρότατα-μονοτονία-σημεία καμπής.

Είναι $f'(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu x - 1}{(2-\sigma\upsilon\nu x)^2}$ με μοναδική ρίζα την $x = \frac{\pi}{3}$ στο $[0,\pi]$ και $f''(x) = -\frac{2\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(2-\sigma\upsilon\nu x)^2}$ με ρίζες τις ρίζες των ε-

ξισώσεων $\{ημx = 0$ και $συνx+1 = 0\} \leftrightarrow \{x = κπ,\ x = π, κ \in Z\}$
$\leftrightarrow \{x = 0, x = π\}$.

Επειδή δε $f''\left(\frac{π}{3}\right) = -\dfrac{2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^3} < 0$ η f στη θέση $x = \frac{π}{3}$

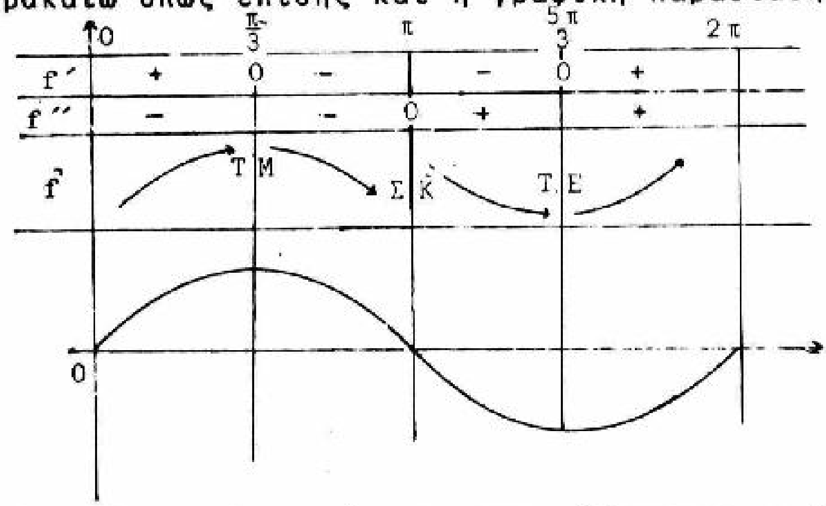
έχει μέγιστο το $f\left(\frac{π}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ στο $[0,π]$. Ακόμη με $x \in \left(0, \frac{π}{3}\right]$

είναι $f'(x) > 0 \rightarrow f\uparrow$ σ'αυτό και με $x \in \left(\frac{π}{3}, π\right]$ είναι $f'(x) < 0$

$\rightarrow f\downarrow$ σ'αυτό. Επίσης $\forall\, x \in [0,π]$ είναι $f''(x) \leq 0$ που σημαίνει ότι η f είναι κοίλη κάτω στο $[0,π]$. Σημεία καμπής υπάρχουν στις ρίζες της δεύτερης παραγώγου δηλαδή στις θέσεις $x = 0$ και $x = π$.

6. Η f συναντά τον άξονα x στο σημείο (0,0) και τον άξονα y στο σημείο (π,0).

7. Ο πίνακας μεταβολών της f στο διάστημα $[0,2π]$ είναι ο παρακάτω όπως επίσης και η γραφική παράσταση της f.



Γενικά η f έχει μέγιστο στις θέσεις $x_κ = 2κπ + \frac{π}{3}$, $κ \in Z$ και ελάχιστο στις θέσεις $x_ρ = 2ρπ - \frac{π}{3}$, $ρ \in Z$.

Σημεία καμπής στις θέσεις $x_κ' = κπ$, $κ \in Z$ και $x_κ' = 2κπ \pm π, κ \in Z$

Θέμα 10. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(x^2-3x+2)$.

Λύση: 1. Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathcal{D}(f) =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x^2-3x+2 > 0\} = (-2,1) \cup (1,+\infty)$

2. Δεν είναι άρτια, περιττή, περιοδική.

3. Ασύμπτωτες. Για οριζόντιες πρέπει $\lim_{x\to-2}\ln(x^2-3x+2) = +\infty$ οπότε η ευθεία $x = -2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη και $\lim_{x\to1}\ln(x^2-3x+2) = +\infty$ οπότε και η ευθεία $x = 1$ είναι κι αυτή οριζόντια ασύμπτωτη. Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν γιατί $\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2-3x+2) = +\infty$.

4. Ακρότατα μονοτονία και σημεία καμπής.

Αν υπάρχουν θα αναζητηθούν μέσα στις ρίζες της πρώτης και δεύτερης παραγώγου.

Είναι $f'(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{x^2-3x+2} = \dfrac{3(x+1)}{(x+2)(x-1)}$ με ρίζα την $x = -1$ και

$f''(x) = -3\,\dfrac{x^2+2x+3}{(x^2+x-2)^2}$ που δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Επειδή δε για $1<x$ ή $-2 < x < -1$ είναι $f'(x) > 0$ και για $-1 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-2,-1) \cup (1,+\infty)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(-1,1)$ και έχει μέγιστο στη θέση $x = -1$ τον αριθμό $f(-1) = \ln 4$.

Επειδή δε $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ είναι $f''(x) < 0$ η f δεν έχει σημεία καμπής.

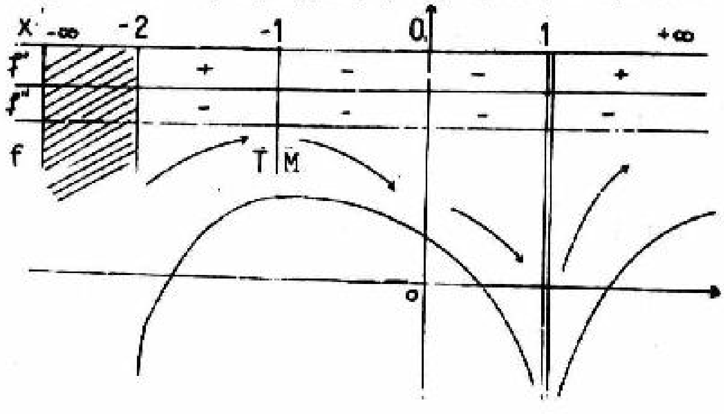
5. **Κοίλα της f.** Είναι $f''(x) < 0\ \forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

6. **Σημεία τομής με τους άξονες.**

Για $x = 0$ είναι $x = \ln 2$ άρα η f συναντά τον άξονα y στο σημείο $(0,\ln 2)$ και για $y = 0$ είναι $\ln(x^2-3x+2) = \ln e \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x^2-3x+2-e = 0$ που έχει τρεις πραγματικές ρίζες $\rho_1,\rho_2,$ ρ_3 άρα η f συναντά τον άξονα x στα σημεία $(\rho_1,0),(\rho_2,0),$ $(\rho_3, 0)$.

7. Ο πίνακας μεταβολών της f και η πρόχειρη γραφική παράσταση είναι η παρακάτω.



Θέμα 11. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2-3}$

Λύση: 1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

2. Δεν παρουσιάζει συμμετρία και δεν είναι περιοδική.

3. Έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = \pm\sqrt{3}$ γιατί είναι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ και την ευθεία $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη γιατί $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^2-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x(x^2-3)^2} = 0$

4. Ακρότατα - μονοτονία - σημεία καμπής.

Είναι $f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2-3)-e^{-x}2x}{(x^2-3)^2} = -\frac{x^2+2x-3}{e^x(x^2-3)^2}$ με ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = -3$ και επειδή για $x\in(-3,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},1)$ είναι $f'(x)>0$ η f είναι γνήσια αύξουσα σ'αυτό επειδή για $x\in(-\infty,-3)\cup(1,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$ είναι $f'(x)<0$ η f είναι γνήσια φθίνουσα σ'αυτό.

Ακόμη η f αλλάζει πρόσημο στις θέσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = -3$ οπότε στη θέση $x_1 = 1$ έχει μέγιστο το $f(1) = -\frac{1}{2e}$ και στην θέση $x_2 = -3$ έχει ελάχιστο το $f(-3) = \frac{e^3}{6}$. Η δεύτερη παράγωγος της f είναι $f''(x) = \frac{x^4+4x^3-12x+15}{e^x(x^2-3)^3}$ που δεν έχει πραγματικές ρίζες Επομένως η f δεν έχει σημεία καμπής.

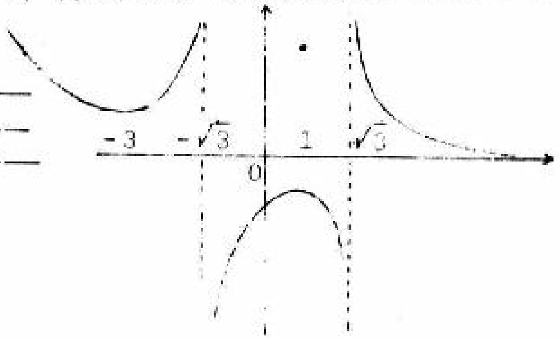
5. **Κοίλα της f.** Επειδή $\forall\ x\in(-\infty,-\sqrt{3})$ είναι $f''(x)>0$ και $\forall\ x\in(\sqrt{3},+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και $\forall\ x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ είναι $f''(x)<0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

6. Σημεία με τους άξονες: Με $x = 0$ είναι $y = -\frac{1}{3}$ άρα η f συναντά τον άξονα y στο σημείο $(0,-\frac{1}{3})$.

Με $x = 0$ είναι $e^{-x} \neq 0$ άρα η f δεν συναντά τον άξονα x.

7. Πίνακας μεταβολών της f και η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω.

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		−		+		+		−		−	
f''		+		+		−		−		+	
f		↘	ΤΕ	↗		↗	ΤΜ	↘		↘	



ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις

i) f με $f(x) = x^3-3x^2+2x-1$

ii) f με $f(x) = \lambda x^2+2x+1, \lambda \in \mathbb{R}$

iii) f με $f(x) = 2x^4-x^2+1$

iv) f με $f(x) = x^4+2x^2-3$

v) f με $f(x) = x^2(x-1)$

vi) f με $f(x) = (x-1)(x+1)^2$

vii) f με $f(x) = x-\sqrt{x+2}$

viii) f με $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$

2. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις

i) f με $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$

ii) f με $f(x) = \dfrac{2x+4}{-x+1}$

iii) f με $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x-1}$

iv) f με $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$

v) f με $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

vi) f με $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

vii) f με $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x+1}$

viii) f με $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$

3. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις

1) f με $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

2) h με $h(x) = \sqrt{14x^2-2x^3-x^4}$

3) g με $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$

4) φ με $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

5) f_1 με $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

6) h_1 με $h_1(x) = \sqrt{x^2-x-2}$

7) g_1 με $g_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

8) φ_1 με $\varphi_1(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-3}}$

4. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x) = ημx+συνx$

β) h με $h(x) = (1-συνx)συνx$

γ) g με $g(x) = συν(\pi\sqrt{x})$

δ) φ με $\varphi(x) = εφx+σφx$

ε) f_1 με $f_1(x) = συν^2x+ημ^2x+1$

στ) h_1 με $h_1(x) = ημ^2x+συνx$

ζ) g_1 με $g_1(x) = ημ^2x$

η) φ_1 με $\varphi_1(x) = \dfrac{2συν^2x}{2συνx-1}$ στο $(0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \pi]$.

5. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις με τύπους:

α) $f(x) = xe^{-x}$

β) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{e^x}$

ε) $f(x) = x^x$

στ) $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$

γ) $f(x) = xe^{-2x^2+3}$

δ) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

ζ) $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

η) $f(x) = e^{2x}\eta\mu x$

6. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις

1. f με $f(x) = x-1-\ln x$
2. f με $f(x) = \ln\sqrt{-x^2+4x-3}$
3. f με $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x}$
4. f με $f(x) = \ln(x^2+1)$
5. f με $f(x) = x^2\ln^2 x$

6) f με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

7) f με $f(x) = \begin{cases} x\ln^2 x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

8) f με $f(x) = 1-\frac{x^3}{3}-2\ln x$

9) f με $f(x) = \begin{cases} e^x+x(\ln x-e-1), & x>0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

7. Να βρεθεί γραφικά το πλήθος των ριζών της εξίσωσης.

$$x^3-8x^2+3x+\lambda = 0$$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = |x^2-3x+2|$.
Να μελετηθεί και σε συνέχεια να βρεθούν γραφικά οι λύσεις της εξίσωσης $|x^2-3x+2| = \lambda \in \mathbb{R}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{2}+\alpha+\frac{\beta}{x^2}$

i) Να προσδιορίσετε τα α,β ώστε $f(-1) = 0$ και το διάγραμμα της f να διέρχεται από σημείο με ελάχιστο για $x = 2$.
ii) Να γίνει μελέτη της f.

10. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x+\frac{\eta\mu 2x}{2}+\frac{\eta\mu 3x}{3}$

11. Όμοια να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu x}$

12. Γραφικά να προσδιορίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $4x^3-3x-\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

κεφαλαιο 6

ολοκληρωματα

6.1. Έννοια του ολοκληρώματος.

Ορισμός 1. Καλούμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης f_1 από α ως β ή με άκρα τα α και β και το συμβολίζουμε με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ την διαφορά $f_1(\beta)-f_1(\alpha)$ όπου f_1 μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.

Έχουμε συνεπώς από τον ορισμό : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta)-f_1(\alpha)$.

Η σταθερή διαφορά $f_1(\beta)-f_1(\alpha)$ δεν εξαρτάται από την εκλογή της παράγουσας και αυτό γιατί κάθε άλλη παράγουσα f_2 της f δίνεται από την σχέση $f_2(x) = f_1(x)+c$, επομένως τότε:
$f_2(\beta)-f_2(\alpha) = f_1(\beta)+c-f_1(\alpha)-c = f_1(\beta)-f_1(\alpha)$.

Παρατήρηση 1. Πολλές φορές γράφουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta)-f_1(\alpha) = [f_1(x)]_\alpha^\beta = f_1(x)\Big|_\alpha^\beta$$

Παρατήρηση 2. Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εξαρτάται μόνο από την f(x) και από τα άκρα ολοκληρώσεως και όχι από τη μεταβλητή x, δηλ. είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$.

Παρατήρηση 3. Η συνθήκη συνέχειας της f είναι ικανή, όχι όμως και αναγκαία για την ύπαρξη του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Η θεωρία της ολοκλήρωσης στηρίζεται στις παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 1. Ισχύει $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$.

Απόδειξη: Έστω $f_1(x)$ μια παράγουσα της $f(x)$, τότε θα έχουμε

$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx = [f_1(x)]_\alpha^\alpha = f_1(\alpha)-f_1(\alpha) = 0$$

Πρόταση 2. Εάν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx \iff \int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx = 0 = \int_\alpha^\alpha f(x)dx.$$

Απόδειξη: Έστω f_1 μια παράγουσα της f, τότε έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta)-f_1(\alpha) \quad \text{και} \quad \int_\beta^\alpha f(x)dx = f_1(\alpha)-f_1(\beta) =$$

$= -[f_1(\beta)-f_1(\alpha)]$. Άρα το αποδεικτέο.

Παρατήρηση: Το σύμβολο $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ έχει έννοια και στις τρείς περιπτώσεις: i) $\alpha < \beta$, ii) $\alpha = \beta$, iii) $\alpha > \beta$.

6.2. Υπολογισμός του ολοκληρώματος.

Ορισμός 2. (Κατά Riemann). Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη και φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$. Διαρούμε το $[\alpha,\beta]$ με τα σημεία $x_1,x_2,\dots,x_{\nu-1}$ στα ν διαστήματα $[\alpha = x_0,x_1],[x_1, x_2],\dots$ $[x_{\nu-1},x_\nu = \beta]$.
Σε κάθε ένα υποδιάστημα παίρνουμε σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$(x_1-x_0)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\dots+(x_\nu-x_{\nu-1})f(\xi_\nu) =$$
$$= \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)(x_\kappa-x_{\kappa-1}).$$

Εάν για κάθε τέτοια υποδιαίρεση του $[\alpha,\beta]$ και για κάθε εκλογή των σημείων ξ_κ το όριο του $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)(x_\kappa-x_{\kappa-1})$ ισούται με θ, όταν το $x_\kappa-x_{\kappa-1}\to 0$ τότε ο αριθμός θ λέγεται ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x)$ από α ως β και συμβολίζεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Ώστε έχουμε από τον ορισμό: $\lim\limits_{\substack{\nu\to+\infty \\ x_\kappa-x_{\kappa-1}\to 0}} \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)(x_\kappa-x_{\kappa-1}) = \theta =$

$= \int_\alpha^\beta f(x)dx.$

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί το $\int_\alpha^\beta e^x dx$ κατά Riemann ($\alpha<\beta$).

Απάντηση: Η e^x είναι συνεχής $\forall\, x\in\mathbb{R}$ και άρα ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Προς αυτό χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε ισόπλατα διαστήματα πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με τους αριθμούς $x_1 = \alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu}$, $x_2=\alpha+2\frac{\beta-\alpha}{\nu},\dots, x_{\nu-1}=\alpha+\frac{(\nu-1)(\beta-\alpha)}{\nu}$ και ενδιάμεσα σημεία ξ_κ, εκλέγουμε τα αριστερά άκρα των διαστημάτων, τότε θα έχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)(x_\kappa-x_{\kappa-1}) = (x_1-\alpha)e^\alpha+(x_2-x_1)e^{x_1}+\dots+(\beta-x_{\nu-1})e^{x_{\nu-1}} =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[e^\alpha+e^{\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu}}+\dots+e^{\alpha+\frac{(\nu-1)(\beta-\alpha)}{\nu}}\right] =$$

$$=e^\alpha\,\frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[1+e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}+\dots+e^{\frac{\nu-1}{\nu}(\beta-\alpha)}\right] =$$

$$= e^\alpha\,\frac{\beta-\alpha}{\nu}\,\frac{\left(e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}\right)^\nu-1}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1} = e^\alpha\,\frac{\beta-\alpha}{\nu}\,\frac{e^{\beta-\alpha}-1}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1} = (e^\beta-e^\alpha)\,\frac{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1}$$

$$\text{Άρα } \lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = (e^\beta-e^\alpha)\lim_{\nu\to\infty}\frac{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1} = e^\beta-e^\alpha \text{ γιατί } \lim_{\nu\to\infty}\frac{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}{e^{\frac{\beta-\alpha}{\nu}}-1}=1$$

Επομένως: $\int_\alpha^\beta e^x dx = \lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = e^\beta-e^\alpha$.

6.3. Ιδιότητες ολοκληρώματος - Γραμμικότητα.

Πρόταση 1. Εάν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και κ σταθερά ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta \kappa f(x)dx = \kappa\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Απόδειξη: Έστω f_1 μια παράγουσα της f, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta)-f_1(\alpha) \Rightarrow \kappa\int_\alpha^\beta f(x)dx = \kappa[f_1(\beta)-f_1(\alpha)]$. Αλλά $\int_\alpha^\beta \kappa f(x)dx = \kappa\int_\alpha^\beta f(x)dx \Rightarrow \int_\alpha^\beta \kappa f(x)dx = \kappa[f_1(\beta)-f_1(\alpha)]$. Άρα το ζητούμενο.

Πρόταση 2. Εάν οι συναρτήσεις f_1, f_2 είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύει: $\int_\alpha^\beta [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int_\alpha^\beta f_1(x)dx+\int_\alpha^\beta f_2(x)dx$.

Απόδειξη: Έστω οι f και φ δύο παράγουσες των f_1 και f_2 αντίστοιχα. Τότε $\int_\alpha^\beta f_1(x)dx = f(\beta)-f(\alpha)$ και $\int_\alpha^\beta f_2(x)dx = \varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$. Άρα: $\int_\alpha^\beta f_1(x)dx+\int_\alpha^\beta f_2(x)dx = f(\beta)-f(\alpha)+\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$ (1)

Επίσης έχουμε: $\int[f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx \rightarrow$

$\rightarrow \int_\alpha^\beta [f_1(x)+f_2(x)]dx = [f(x)]_\alpha^\beta+[\varphi(x)]_\alpha^\beta = f(\beta)-f(\alpha)+\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$ (2). Γενικότερα οι προτάσεις (1),(2) δίνουν:

$\int_\alpha^\beta [\xi_1 f_1(x)+\xi_2 f_2(x)+\ldots+\xi_\nu f_\nu(x)]dx = \int_\alpha^\beta \xi_1 f_1(x)dx+\int_\alpha^\beta \xi_2 f_2(x)dx+\ldots+\int_\alpha^\beta \xi_\nu f_\nu(x)dx$, όπου $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ σταθερές πεπερασμένου πλήθους.

Πρόταση 3. Εάν f(x) συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\xi \in (\alpha,\beta)$ τότε ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\xi f(x)dx+\int_\xi^\beta f(x)dx$.

Απόδειξη: Επειδή f(x) συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ υπάρχει το αόριστο ολοκλήρωμα αυτής και έστω $\int f(x)dx = f_1(x)$ όπου $f_1(x)$ μια παράγουσα της f. Τότε θα έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta)-f_1(\alpha) \quad (1).$$

$\int_\alpha^\xi f(x)dx = f_1(\xi)-f_1(\alpha)$ (2), $\int_\xi^\beta f(x)dx = f_1(\beta)-f_1(\xi)$ (3)

Άρα $\int_\alpha^\xi f(x)dx+\int_\xi^\beta f(x)dx = f_1(\beta)-f_1(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.

6.4. Ολοκλήρωμα και διάταξη.

Πρόταση 1. Εάν $f(x) \geq 0$ και συνεχής $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0 \quad (\alpha < \beta).$$

Απόδειξη: Από την πρόταση2.§6.5 έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$ και επειδή $f(\xi) \geq 0\ \forall\ \xi \in (\alpha,\beta)$ και $\beta-\alpha > 0$ είναι: $f(\xi)(\beta-\alpha) \geq 0$. Άρα: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

Πρόταση 2. Εάν f_1, f_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $f_1(x) \geq f_2(x)$ $\forall$ $x \in [\alpha,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f_1(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f_2(x)dx.$$

Απόδειξη: Η (1) $\leftrightarrow \int_\alpha^\beta [f_1(x)-f_2(x)]dx \geq 0 \leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$ $\forall$ $x \in [\alpha,\beta]$, όπου $f(x) = f_1(x)-f_2(x)$, η οποία και ισχύει βάση της πρότασης (1).

6.5. Απόλυτη τιμή ολοκληρώματος.

Πρόταση 1. Εάν υπάρχει το ολοκλήρωμα: $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, τότε υπάρχει και το ολοκλήρωμα: $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$ και ισχύει

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \left|\int_\alpha^\beta |f(x)|dx\right|$$

Πρόταση 2. Εάν $f(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Απόδειξη: Επειδή f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει η παράγουσα έστω $f_1(x)$ αυτής $\forall$ $x \in [\alpha,\beta]$. Από Θ. Lagrange για τη $f_1(x)$ συνάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f_1(\beta)-f_1(\alpha) = f_1'(\xi)(\beta-\alpha)$. Αλλά $f_1'(x) = f(x)$ $\forall$ $x \in [\alpha,\beta]$ και επομένως $f_1(\beta)-f_1(\alpha) = f(\xi)(\beta-\alpha)$. Άρα:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Πρόταση 3. Εάν υπάρχουν τα ολοκληρώματα: $\int_\alpha^\beta f_1(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f_2(x)dx$, τότε υπάρχουν και τα:

1. $\int_\alpha^\beta f_1(x)f_2(x)dx$

2. $\int_\alpha^\beta \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $f_2(x) \geq \theta$, $\theta > 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

Πρόταση 4. Εστω f, $\alpha < x < \beta$ μια φραγμένη συνάρτηση τέτοια, ώστε να υπάρχει το $\int_{\xi_2}^{\xi_1} f(x)dx$ $\forall$ $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$.

Ορίζουμε τότε την συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} f(x), \text{αν } \alpha < x < \beta \\ \theta_1, \text{αν } x = \alpha \\ \theta_2, \text{αν } x = \beta \end{cases}$

όπου θ_1, θ_2 τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει και το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \phi(x)dx$ και είναι ανεξάρτητο των θ_1, θ_2.

Πρόταση 5. Εάν υπάρχει το ολοκλήρωμα: $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ με $\alpha < \beta$ και είναι $f(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει και το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sqrt{f(x)}dx$.

Πρόταση 6. Ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\alpha+c}^{\beta+c} f(x-c)dx$, $\forall$ $c \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 7. Ισχύει: $\int_{\alpha c}^{\beta c} f(\frac{x}{c})dx = c\int_\alpha^\beta f(x)dx$ $\forall$ $c \in \mathbb{R}_+^*$

Πρόταση 8. Ισχύει: $\int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha f(\alpha-x)dx$.

Πρόταση 9. Εάν $f(x) = f(2\alpha-x)$, τότε: $\int_0^{2\alpha} f(x)dx = 2\int_0^\alpha f(x)dx$.

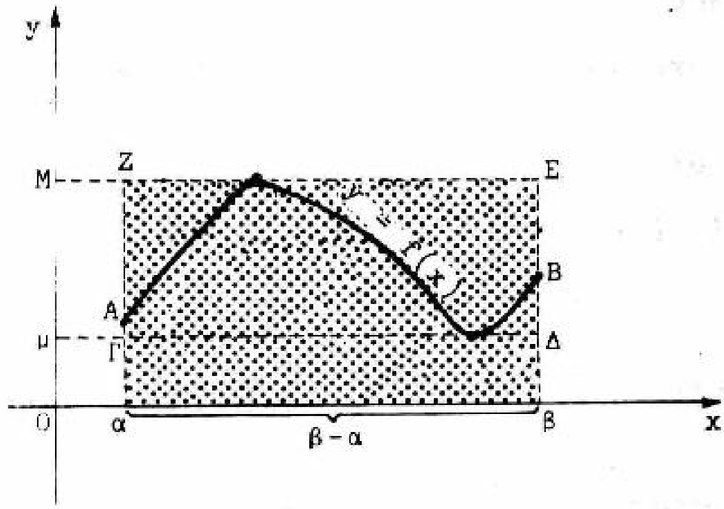
6.6. Θεώρημα μέσης τιμής.

Πρόταση 1. (Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού) Εάν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \equiv \mu$, $\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \equiv M$, τότε είναι: $(\beta-\alpha)\mu \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq (\beta-\alpha)M$

Απόδειξη: Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ με τα διαιρετικά σημεία $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\nu-1}$ στα ν διαστήματα $[\alpha, x_1]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{\nu-1}, \beta]$ και έστω το άθροισμα $\Sigma_\nu = (x_1-\alpha)f(\xi_1)+$ $+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})f(\xi_\nu)$, όπου $\xi_\kappa \in (x_\kappa, x_{\kappa-1})$. Όπως ξέρουμε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή $M = \sup f(x)$ και μια ελαχίστη τιμή $\mu = \inf f(x)$. Εάν τώρα στο Σ_ν αντικαταστήσουμε τις τιμές $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_\nu)$ με τη μέγιστη M αντίστοιχα την ελάχιστη μ παίρνουμε:
$(x_1-\alpha)\mu+(x_2-x_1)\mu+\ldots(\beta-x_{\nu-1})\mu \leq \Sigma_\nu \leq (x_1-\alpha)M+(x_2-x_1)M+\ldots+$ $+(\beta-x_{\nu-1})M$. Και αν πάρουμε τα όρια των μελών έχουμε:
$$\mu(\beta-\alpha) \leq \lim_{\substack{x_\nu \to +\infty \\ x_\kappa - \lambda_{\kappa-1} \to 0}} \Sigma_\nu \leq M(\beta-\alpha) \leftrightarrow \mu(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha).$$

Παρατήρηση 1. Μια εποπτική απόδειξη παίρνουμε από το σχήμα,

όπου $(\beta-\alpha)\mu$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου αβΔΓ, $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι το εμβαδόν του μικτογράμμου τραπεζίου αβΒΑ και $(\beta-\alpha)M$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου αβΕΖ.



Παρατήρηση 2. Από την πρόταση (1) συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ περιέχεται μεταξύ των Μ,μ άρα θα υπάρχει μια τουλάχιστο τιμή $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)$. Άρα ξαναβρίσκουμε και πάλι την πρόταση 2§6.5

6.7. Αλλαγή μεταβλητής.

Πρόταση 1. Εάν f συνεχής στο [α,β], γ τυχαίο αλλά ορισμένο σημείο του [α,β] και x μεταβλητή του [α,β], τότε ισχύει:

$$\int f(x)dx = \int_\gamma^x f(\theta)d\theta$$

Απόδειξη: Έστω $f_1(x)$ μια παράγουσα της $f(x)$, τότε είναι:

$\int f(x)dx = f_1(x)+c$ και $\int_\gamma^x f(\theta)d\theta = f_1(x)-f_1(\gamma) = f_1(x)+c.$

Άρα: $\int f(x)dx = \int_\gamma^x f(\theta)d\theta.$

Πρόταση 2. Εάν η f(x),σ(x) και η παράγωγος σ'(x) είναι συνεχείς στο [α,β], είναι δε $\sigma([\alpha,\beta]) \subseteq [\alpha,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f[\sigma(x)]\sigma'(x)dx = \int_{\sigma(\alpha)}^{\sigma(\beta)} f(\theta)d\theta$$

Απόδειξη: Εάν $f_1(x)$ είναι μια παράγουσα της f(x) θα έχουμε:

$\int_\alpha^\beta f[\sigma(x)]\sigma'(x)dx = [f(\sigma(x))\sigma'(x)dx]_\alpha^\beta = [\int f(\sigma(x))d\sigma(x)]_\alpha^\beta =$

$= [f(\theta)d\theta | \theta = \sigma(x)]_\alpha^\beta = [f_1(\theta)]\theta = \sigma(x)]_\alpha^\beta = [f_1(\sigma(x))]_\alpha^\beta =$

$= f_1(\sigma(\beta)) - f_1(\sigma(\alpha)) = \int_{\sigma(\alpha)}^{\sigma(\beta)} f(\theta)d\theta.$

6.8. Το ορισμένο ολοκλήρωμα σαν συνάρτηση.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)$ με $x \in [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$ και έστω ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_\xi^x f(t)dt$, όπου ξ σταθερό σημείο και x τυχαίο σημείο του $[\alpha,\beta]$. Ορίζεται τότε μια συνάρτηση ως εξής: $\varphi_\xi(x) \equiv \int_\xi^x f(t)dt$, $x \in [\alpha,\beta]$ η οποία ονομάζεται συνάρτηση ενός άκρου ολοκλήρωσης.

Για την παραπάνω ορισθείσα συνάρτηση ισχύει:

Είναι η $\varphi_\xi(x)$ συνεχής, αν δε και η f συνεχής, τότε υπάρχει η παράγωγος της $\varphi_\xi(x)$ και ισχύει:

$\varphi'_\xi(x) = f(x)\ \forall\ x \in [\alpha,\beta] \rightarrow (\int_\xi^x f(t)dt)' = f'(x)\ \forall\ x \in [\alpha,\beta].$

και γενικώτερα: $(\int_\xi^{\sigma(x)} f(t)dt)' = f[\sigma(x)]\sigma'(x).$

Παρατήρηση: Όμοια ορίζεται και η συνάρτηση:

$\sigma_\xi(x) = \int_x^\xi f(t)dt\ \forall\ x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει δε $\sigma_\xi(x) = -\int_\xi^x f(t)dt =$
$= -\varphi_\xi(x)\ \forall\ x \in [\alpha,\beta].$

Παράδειγμα 1. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης:

$$\varphi_0(x) = \int_0^x t^3 dt$$

Απάντηση: Έστω $F(t) = \int t^3 dt \rightarrow F'(t) = t^3$, οπότε $\int_0^x t^3 dt =$
$= [F(t)]_0^x = F(x) - F(0)$. Άρα $\varphi_0(x) = \int_0^x t^3 dt = F(x) - F(0) \rightarrow$
$\rightarrow \varphi'_0(x) = (\int_0^x t^3 dt)' = F'(x) = x^3.$

Παράδειγμα 2. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$\varphi_1(x) = \int_1^x \log 2t dt$$

Απάντηση: Θέτουμε $F(t) = \int \log 2t dt \rightarrow F'(t) = \log 2t$. Άρα

$\int_1^x \log(2t)dt = [F(t)]_1^x = F(x)-F(1)$. Επομένως $\varphi_1(x) = F(x)-F(1)$

$\Rightarrow \varphi_1'(x) = F'(x)(x') = \log(2x)(2x)' = 2\log 2x$.

Τελικά παίρνουμε: $\varphi_1'(x) = \{\int_1^x \log 2t dt\}' = 2\log 2x$.

6.9. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Όριο ακολουθίας με χρήση του ορισμένου ολοκληρώματος.

Υπάρχουν ορισμένες μορφές ακολουθιών για τις οποίες το ορισμένο ολοκλήρωμα, όπως ορίστηκε κατά Riemann, δίνει λύση, στο πρόβλημα εύρεσης του ορίου αυτών.

Γιαυτό όταν μας δοθεί μια ακολουθία $\alpha_\nu/\nu\in\mathbb{N}$ μετασχηματίζουμε αυτήν έτσι ώστε οι όροι της να προκύπτουν σαν τιμές μιας συνάρτησης f(x) για διαφορετικές τιμές του x.

Στην συνέχεια βρίσκουμε το όριο του πρώτου και τελευταίου όρου αυτής και διαμερίζουμε το διάστημα που σχηματίζουν οι δύο αριθμοί, σχηματίζουμε έτσι ένα ενδιάμεσο άθροισμα η οριακή τιμή του οποίου είναι κατά τα γνωστά το

$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f_1(\beta)-f_1(\alpha)$ που συμπίπτει με το $\lim \alpha_\nu$.

$$\lim_{\nu\to+\infty} \Sigma_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_\kappa - x_{\kappa-1}) f(\xi_\kappa) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu .$$

Παράδειγμα 1. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu$ με $\alpha_\nu = \frac{1^2}{\nu^3+1^3} + \frac{2^2}{\nu^3+2^3} + \dots + \frac{\nu^2}{\nu^3+\nu^3}$

Απάντηση: Η $\alpha_\nu/\nu\in\mathbb{N}$ γράφεται:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left[\frac{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\nu}\right)^3} + \frac{\left(\frac{2}{\nu}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{\nu}\right)^3} + \dots + \frac{\left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2}{1+\left(\frac{\nu}{\nu}\right)^3}\right]$$

οπότε φαίνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$ με $x = \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \dots, \frac{\nu}{\nu}$ δίνει όλους τους όρους της $\alpha_\nu/\nu\in\mathbb{N}$. Επίσης για $\nu\to+\infty$ ο πρώτος και τελευταίος όρος της αγκύλης συγκλίνουν στο 0 και 1 αντίστοιχα και από αυτό διαιρούμε το διάστημα [0,1] ως ε-

ξής $\mathcal{D}_\nu = \{0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu}{\nu} = 1\}$, και σχηματίζουμε το ενδιάμεσο άθροισμα της f(x) με σημεία τα δεξιά άκρα του $\mathcal{D}_\nu$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{1}{\nu}\frac{(\frac{1}{\nu})^2}{1+(\frac{1}{\nu})^3} + \frac{1}{\nu}\frac{(\frac{2}{\nu})^2}{1+(\frac{2}{\nu})^3} + \ldots + \frac{1}{\nu}\frac{1}{1+(\frac{\nu}{\nu})^3}\right] =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left[\log(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\log 1 =$$

$$= \frac{\log 2}{3} \rightarrow \lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = \frac{\log 2}{3}.$$

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί το $\lim\alpha_\nu$ με
$\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{(1+\frac{1^2}{\nu^2})(1+\frac{2^2}{\nu^2})\ldots(1+\frac{\nu^2}{\nu^2})}$.

Απάντηση: Είναι $\log\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left[\log(1+\frac{1^2}{\nu^2})+\log(1+\frac{2^2}{\nu^2})+\ldots+\log(1+\frac{\nu^2}{\nu^2})\right]$

οπότε η συνάρτηση $f(x) = \log(1+x^2)$ με $x = \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu}{\nu}$ δίνει όλους τους όρους της $\log\alpha_\nu$, του $\nu\to+\infty$ ο πρώτος και τελευταίος όρος αυτής συγκλίνουν προς το 0 και 1 αντίστοιχα, διαμερίζουμε επομένως το διάστημα [0,1] ως εξής:

$\mathcal{D}_\nu = \{0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu}{\nu} = 1\}$ και σχηματίζουμε το ενδιάμεσο άθροισμα

$$\Sigma_\nu = \frac{1}{\nu}\log(1+\frac{1}{\nu^2}) + \frac{1}{\nu}\log(1+\frac{2^2}{\nu^2}) + \ldots + \frac{1}{\nu}\log(1+\frac{\nu^2}{\nu^2}).$$

Επειδή δε $\lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \log(1+x^2)dx =$

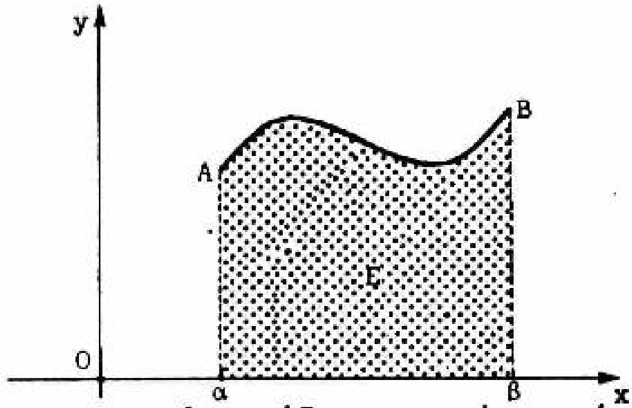
$$= \left[x\log(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \log 2 - 2\int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})dx = \log 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \log 2 - 2.$$

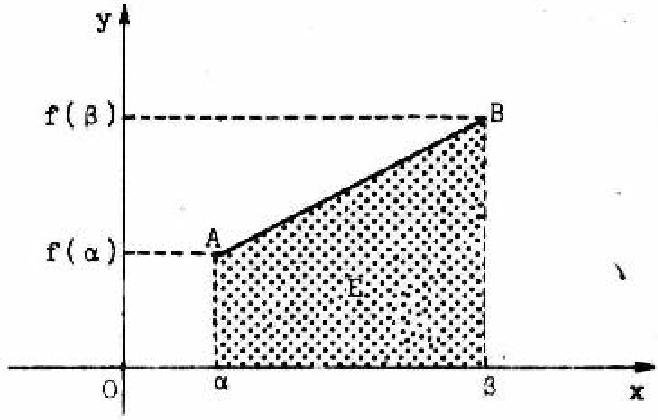
Άρα $\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = \frac{\pi}{2} + \log 2 - 2$.

6.10. Το ορισμένο ολοκλήρωμα σαν εμβαδόν.

Έστω η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο [α,β] με $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in [\alpha,\beta]$. Ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν Ε το ορισ-



μένο από το διάγραμμα της f, του άξονα των x και των ευθειών x = α, x = β όπως στο σχήμα.
Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος προέκυψε κατ'αρχήν σαν πρόβλημα εμβαδού και η ιδέα οφείλεται στον Αρχιμήδη, ο οποίος εφάρμοσε αυτήν για τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου, του παραβολικού τμήματος και άλλων επίπεδων χώρων.



Γενικά το εμβαδόν ενός επίπεδου χώρου ο οποίος περικλείεται σε μια καμπύλη, προσεγγίζεται με το εμβαδόν το οποίο περικλείει μια εγγεγραμμένη σ'αυτήν πολυγωνική γραμμή.
Ας θεωρήσουμε κατ'αρχήν την περίπτωση, όπου η f είναι γραμμική συνάρτηση, δηλ. $f(x) = \gamma x+\delta$, τότε ο χώρος Ε είναι το τραπέζιο ΑαβΒ (Βλέπε παραπάνω σχήμα), του οποίου το εμβαδόν είναι: $E = \frac{(A\alpha)+(B\beta)}{2}(\beta-\alpha) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$

Αλλά είναι και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta(\gamma x+\delta)dx = \left[\gamma\frac{x^2}{2}+\delta x\right]_\alpha^\beta =$

$$= \frac{\gamma\beta^2}{2}+\delta\beta-\frac{\gamma\alpha^2}{2}-\delta\alpha = \frac{\gamma}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\delta(\beta-\alpha) =$$

$$= \left[\frac{\gamma(\beta+\alpha)}{2}+\delta\right](\beta-\alpha) = \frac{\gamma\beta+\gamma\alpha+2\delta}{2}(\beta-\alpha) = \frac{(\gamma\alpha+\delta)+(\gamma\beta+\delta)}{2}(\beta-\alpha) =$$

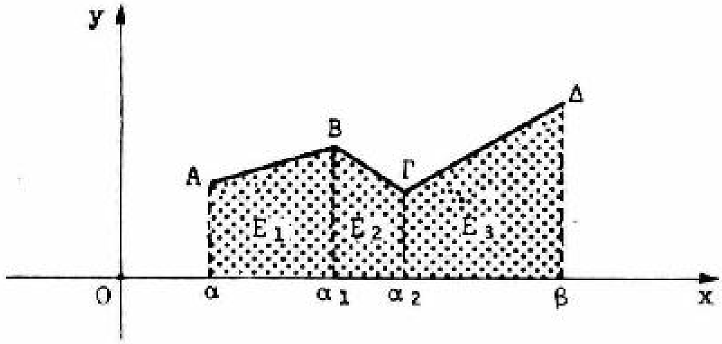
$$= \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = E.$$

Συνεπώς το εμβαδόν του χώρου Ε δίνεται από το

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = E.$$

Ο τύπος ισχύει και στην περίπτωση, όπου το διάγραμμα της f

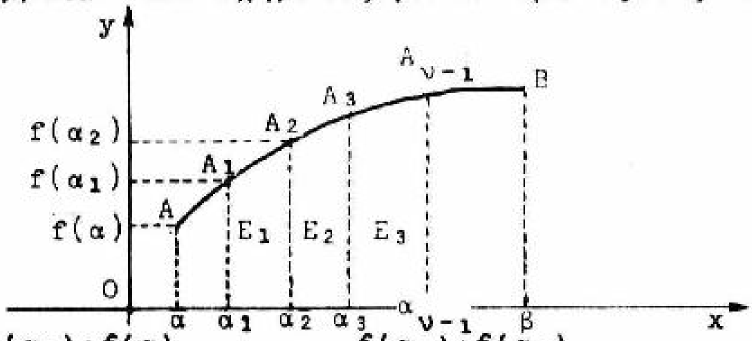
είναι μια πολυγωνική γραμμή όπως στο σχήμα.
Τότε είναι $(E) = (E_1)+(E_2)+(E_2)$.
Αλλά βάσει των παραπάνω έχουμε:



$$(E_1) = \int_{\alpha}^{\alpha_1} f(x)dx,\quad (E_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx,\quad (E_2) = \int_{\alpha_2}^{\beta} f(x)dx$$

και βάσει της πρότασης 2.3§6.3 του ορισμένου ολοκληρώματος παίρνουμε: $\int_{\alpha}^{\alpha_1} f(x)dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx+\int_{\alpha_2}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (E)$

Έστω τώρα ότι το διάγραμμα της f είναι μια τυχαία καμπύλη, τότε μπορούμε να διαιρέσουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ίσα μέρη με τα διαιρετικά σημεία $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_{\nu-1}$, και έστω $A_1, A_2,\dots,A_{\nu-1}$ τα σημεία τομής των ευθειών $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2,\dots$, $x = \alpha_{\nu-1}$ και του διαγράμματος της f αντίστοιχα (όπως στο σχήμα). Τότε το ζητούμενο εμβαδόν E προσεγγίζεται με το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων τραπεζίων, δηλ. είναι:



$$(E_\nu) = \frac{f(\alpha_1)+f(\alpha)}{2}(\alpha_1-\alpha)+\frac{f(\alpha_2)+f(\alpha_1)}{2}(\alpha_2-\alpha_1)+\dots+$$

$$+\frac{f(\beta)-f(\alpha_{\nu-1})}{2}(\beta-\alpha_{\nu-1}) = \frac{f(\alpha_1)+f(\alpha)}{2}\frac{\beta-\alpha}{\nu}+\frac{f(\alpha_2)+f(\alpha_1)}{2}\frac{\beta-\alpha}{\nu}+$$

$$+\dots+\frac{f(\beta)-f(\alpha_{\nu-1})}{2}\frac{\beta-\alpha}{\nu} = \frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[f(\alpha)+f(\alpha_1)+\dots+f(\alpha_{\nu-1})\right]+$$

$$+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{2}\frac{\beta-\alpha}{\nu} \text{ ή } (E) = \frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\dots+f(\alpha_{\nu-1})+f(\beta)\right]+$$

$$+\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{2}\,\frac{\beta-\alpha}{\nu}$$

Εάν υπάρχει το $\lim_{\nu\to+\infty}(E_\nu)$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός, αυτός δίνει την τιμή του ζητούμενου εμβαδού (E).

Άρα $(E) = \lim_{\nu\to+\infty}(E_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}[f(\alpha)+f(\alpha_1)+\ldots+f(\alpha_{\nu-1})]$ ή

$(E) = \lim_{\nu\to+\infty}(E_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}[f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_{\nu-1})+f(\beta)]$, γιατί $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\nu}\frac{\beta-\alpha}{\nu} = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\nu}\frac{\beta-\alpha}{\nu} = 0$

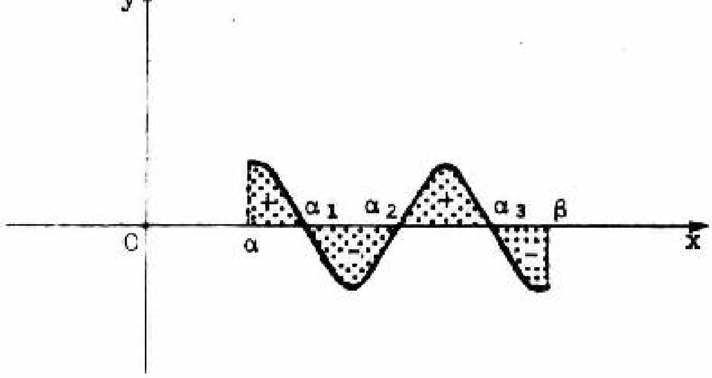
Αποδεικνύεται ότι $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}[f(\alpha)+f(\alpha_1)+\ldots+f(\alpha_{\nu-1})] =$

$= \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}[f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_{\nu-1})+f(\beta)] = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$

• Συνεπώς $(E) = \lim_{\nu\to+\infty}(E_\nu) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$

Παρατήρηση 1.

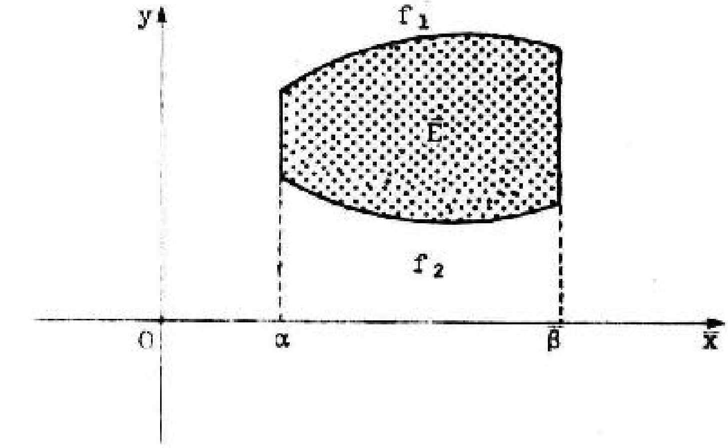
Εάν $f(x) < 0$ $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι αριθμός αρνητικός, και απ' αυτό αν το διάγραμμα της f παρουσιάζεται όπως στο σχήμα, τότε το εμβαδόν θεωρείται προσημασμένο θετικό-αρνητικό. Κατά συνέπεια γιά το προσημασμένο εμβαδό θα έχουμε:



$(E) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\alpha_1} f(x)dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)dx+\int_{\alpha_3}^{\beta} f(x)dx.$

Παρατήρηση 2.

Εάν ο χώρος E περικλείεται από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τα διαγράμματα των f_1 και f_2 όπως στο σχήμα θα έχουμε:

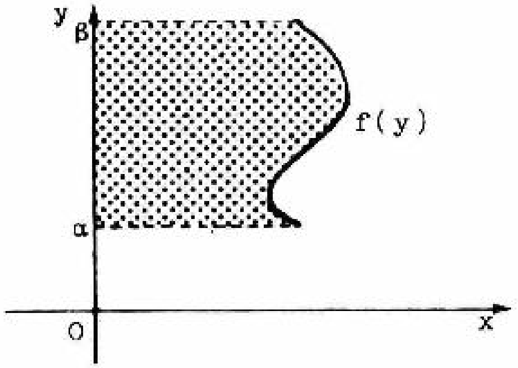


$(E) = \int_\alpha^\beta [f_1(x)-f_2(x)]dx.$

Παρατήρηση 3.

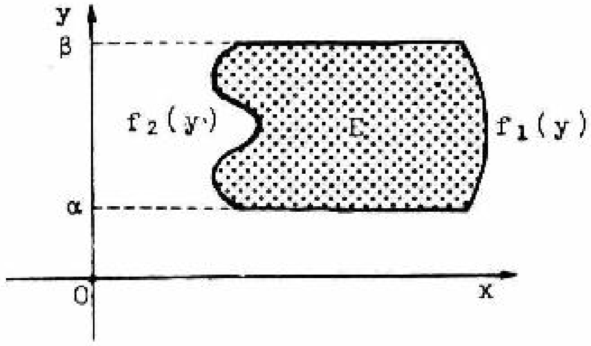
Εάν ο χώρος Ε περικλείεται από τις ευθείες y = α, y = = β, και του διαγράμματος της x = f(y) όπως στο σχήμα θα είναι:

$(E) = \int_{\alpha}^{\beta} f(y)dy.$



Παρατήρηση 4.
Το εμβαδόν του χώρου Ε που περικλείεται από τις ευθείες y = α, y = β και τα διαγράμματα των συναρτήσεων $f_1(y)$ και $f_2(y)$ είναι:

$(E) = \int_{\alpha}^{\beta} [(f_1(y)-f_2(y)]dy$



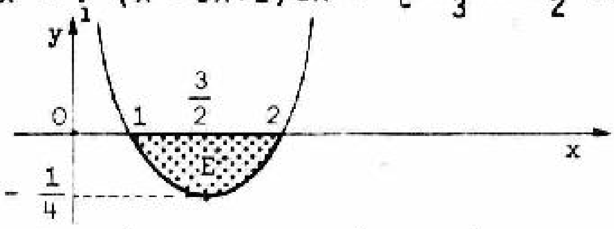
Παράδειγμα. Να υπολογιστούν τα εμβαδά των χώρων των οριζόμενων από τις παρακάτω καμπύλες:

α) $f(x) = x^2-3x+2$ και $y = 0$ **β) $x = 2y^2$, $x = 0$, $y = 3$**

γ) $y = -\frac{x^2}{4} +2$, $x = 2y$ **δ) $x^2+y^2 = 4$, $x^2+y^2 = 4x$.**

Απάντηση: α) Το ζητούμενο εμβαδόν Ε βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης με εξίσωση $y = x^2-3x+12$ και του άξονα των x όπως δείχνει το σχήμα.

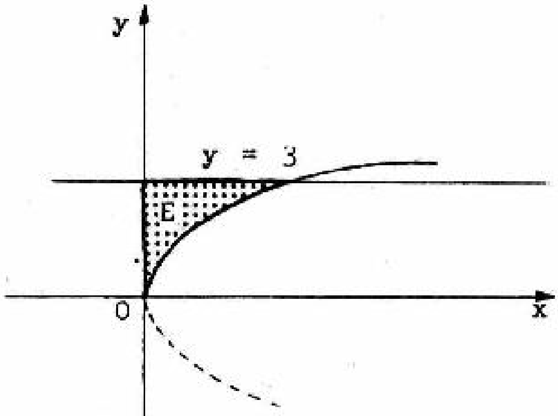
'Αρα $(E) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2-3x+2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2 = -\frac{2}{6}$



Σημείωση 1. Το εμβαδόν είναι αρνητικό γιατί αν η ολοκλήρωση γίνεται στον άξονα των x, τότε κάτω από αυτόν είναι αρνητικό, πάνω δε από αυτόν θετικό, εάν δε η ολοκλήρωση γίνεται στον άξονα yy', τότε δεξιά απ'αυτόν το εμβαδόν είναι θετικό και αριστερά αρνητικό.

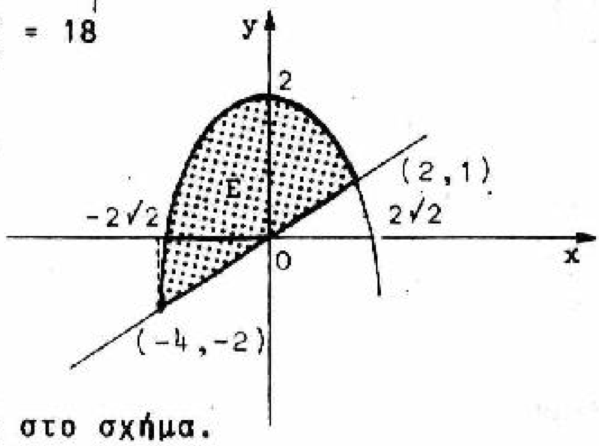
Σημείωση 2. Τα άκρα ολοκλήρωσης βρίσκονται αν θέσουμε f(x)=0

β) Το ζητούμενο εμβαδόν Ε βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης με εξίσωση: $x = 2y^2$ του άξονα yy' και της ευθείας $y = 3$ όπως δείχνει το σχήμα, εάν δε ολοκληρώσουμε ως προς y, θα έχουμε:



$$E = \int_0^3 x\,dy = \int_0^3 2y^2\,dy = \left[2\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 18$$

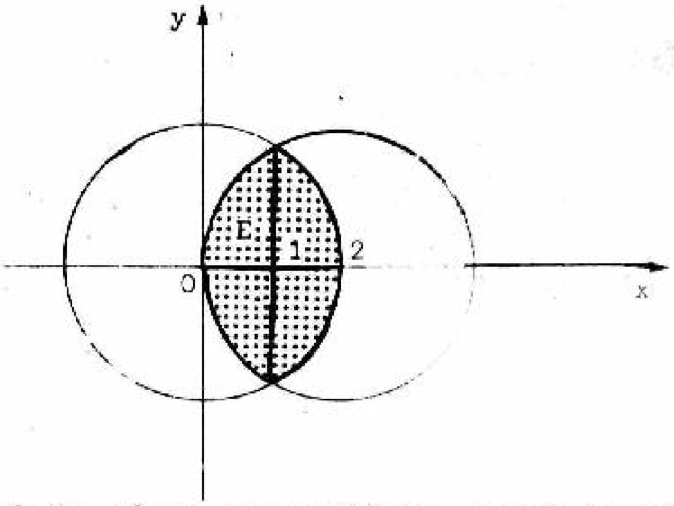
γ) Το εμβαδόν Ε περικλείεται μεταξύ των καμπύλων με εξισώσεις $y_1 = -\frac{x^2}{4}+2$ και $y_2 = \frac{x}{2}$ των οποίων τα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες (-4,-2) και (2,1) όπως στο σχήμα.



$$\text{Άρα } E = \int_{-4}^{2}(y_1-y_2)\,dx = \int_{-4}^{2}\left(-\frac{x^2}{4}+2-\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{12}+2x-\frac{x^2}{4}\right]_{-4}^{2} = -\frac{8}{12}+4-\frac{4}{4}-\frac{64}{12}+8+\frac{16}{4} = 9.$$

δ) Οι δύο περιφέρειες είναι ίσες και η μια διέρχεται από το κέντρο της άλλης, επομένως η κοινή χορδή και ο άξονας xx' χωρίζουν το κοινό μέρος των περιφερειών σε τέσσερα ίσα μέρη, άρα αν υπολογίσουμε το ένα από τα μέρη, τότε το ολικό εμβαδό θα είναι τετραπλάσιο αυτού. Αρκεί επομένως να ολοκληρώσουμε την πρώτη καμπύλη από 1 μέχρι 2, όπως δείχνει το σχήμα.



Συνεπώς $\left(\frac{E}{4}\right) = \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ θέτουμε $x = 2\eta\mu t$, $dx = 2\sigma\upsilon\nu t\,dt$

και με x = 2 παίρνουμε ημt = 1 ➞ $t = \frac{\pi}{2}$ με x = 1 παίρνουμε

ημt = $\frac{1}{2}$ ➞ $t = \frac{\pi}{6}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

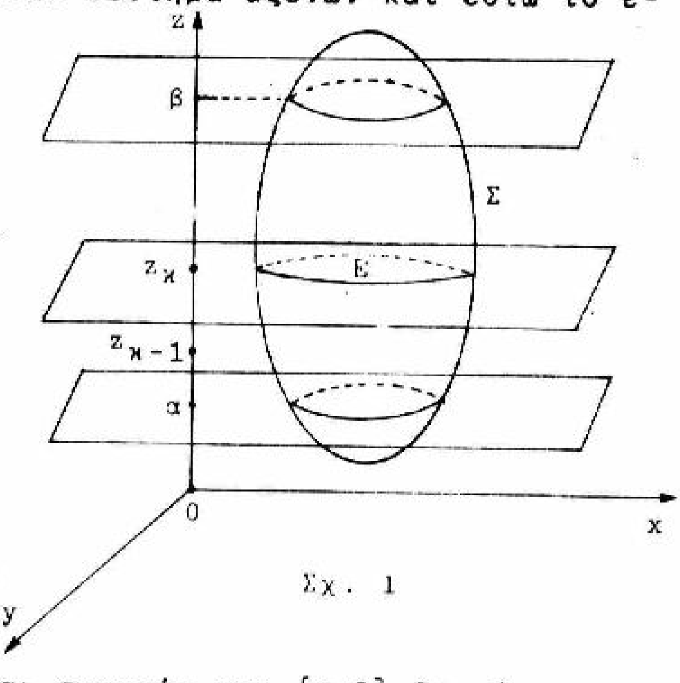
$$\left(\frac{E}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\eta\mu t 2\sigma\upsilon\nu t dt} = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^3 t dt =$$

$$= 4\left[\frac{\sigma\upsilon\nu t\eta\mu t}{2} + \frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Τελικά $(E) = 4\left(\frac{E}{4}\right) = 4\left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

6.11. ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ

Έστω Oxyz ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων και έστω το επίπεδο z = t που τέμνει κάποιο γεωμετρικό στερεό Σ κατά μια επιφάνεια εμβαδού E(t), όπου E(t) μια συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα [α,β]. (Σχήμα 1).



Σχ. 1

Διαμερίζουμε το διάστημα [α,β] με τα ν+1 σημεία $\alpha = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{\kappa-1}, t_\kappa, \ldots, t_{\nu-1}, t_\nu = \beta$ ορίζουμε έτσι ν διαστήματα πλάτους $\delta\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Επειδή η συνάρτηση E(t) είναι συνεχής στο [α,β] θα είναι και σε κάθε διάστημα $[t_\kappa, t_{\kappa-1}] \subseteq [\alpha,\beta]$ με κ = 1,2,...,ν. Επομένως η E θα έχει κάποια μέγιστη τιμή M_κ και μια ελάχιστη μ_κ αντίστοιχα στο [α,β].

Αν επομένως V_κ είναι ο όγκος του στερεού Σ που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων $z = t_{\kappa-1}$ και $z = t_\kappa$ θα ισχύει:

$$\delta_\nu \mu_\kappa \le v_\kappa \le \delta_\nu M_\kappa$$

Σχηματίζουμε τώρα τα αθροίσματα:

$$\underline{S}_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \delta_\nu \mu_\kappa \quad \text{και} \quad \overline{S}_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \delta_\nu M_\kappa$$

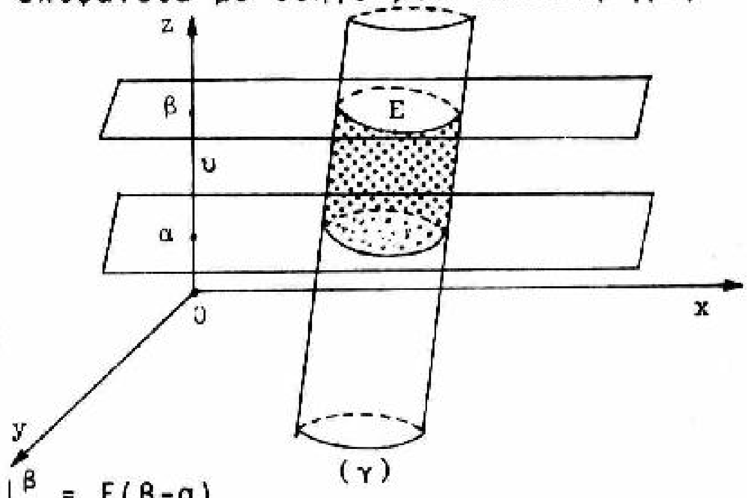
οπότε ο όγκος V του στερεού Σ θα βρίσκεται στο $\underline{S}_\nu \le v \le \overline{S}_\nu$.

Επειδή δε τα αθροίσματα $\underline{S}_\nu$ και $\overline{S}_\nu$ έχουν κοινό όριο το $\int_\alpha^\beta E(t)dt$ θα είναι: $V = \int_\alpha^\beta E(t)dt$ (1)

6.12. ΟΓΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΚΑΙ ΚΩΝΟΥ

Έστω μια κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό μια κλειστή γραμμή γ'. Οι τομές της γ με τα επίπεδα z = α και z = β, είναι ίσες.

Αν υποθέσουμε ότι είναι εμβαδόν E τότε το στερεό που έχει βάσεις αυτές τις τομές έχει όγκο με βάση την (1).



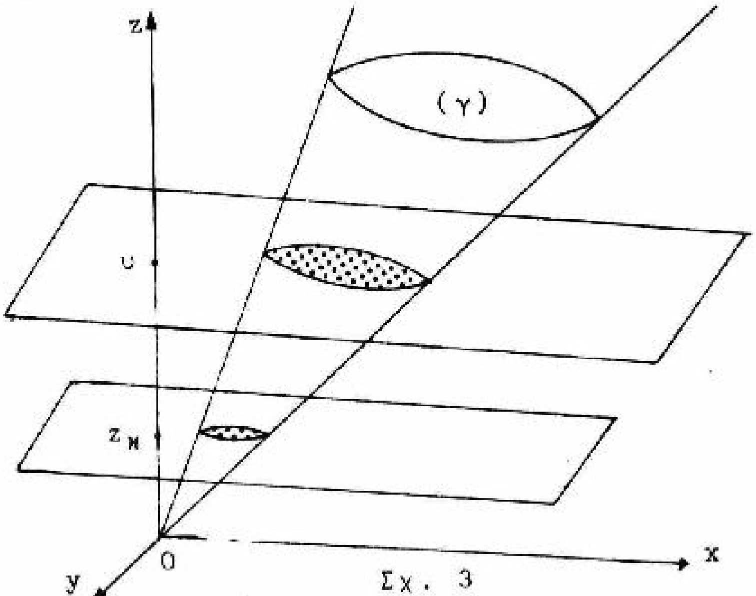
Σχ. 2

$V = \int_\alpha^\beta E dt = E\int_\alpha^\beta dt = Et\Big|_\alpha^\beta = E(\beta-\alpha)$

και αν β-α = υ έχουμε: V = E·υ (2).

Ο τύπος (2) δίνει τον όγκο κυλίνδρου, πρίσματος κ.λ.π. με οδηγό κλειστή γραμμή που είναι κύκλος, πολύγωνο κ.λ.π.

Αν το στερεό έχει οδηγό την κλειστή γραμμή (γ) (Σχήμα 3). Η τομή της με το επίπεδο z=υ έχει εμβαδό E και αν E_t είναι το εμβαδό της τομής της επιφάνειας με το επίπεδο z = t τότε



Σχ. 3

ισχύει: $\dfrac{E}{E_t} = \dfrac{\upsilon^2}{t^2} \rightarrow E_t = E\,\dfrac{t^2}{\upsilon^2}$

(ο λόγος των εμβαδών είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων υψών).

Άρα ο όγκος V του στερεού που έχει βάση την E είναι

$$V = \int_0^{\upsilon} E\,\frac{t^2}{\upsilon^2}\,dt = \frac{E}{\upsilon^2}\int_0^{\upsilon} t^2 dt = \frac{E}{\upsilon^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\upsilon} =$$

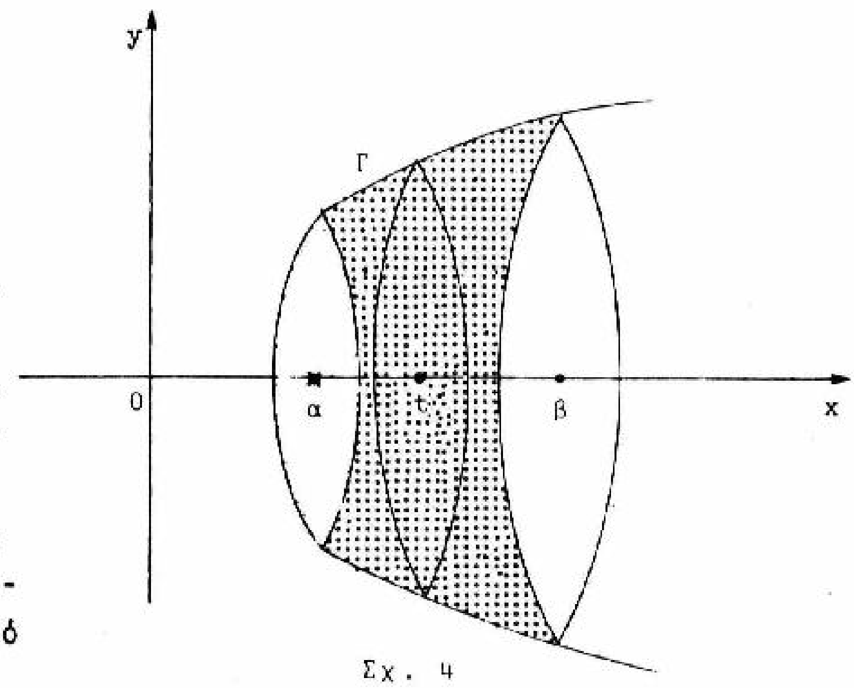
$$= \frac{E}{\upsilon^2}\,\frac{\upsilon^3}{3} = \frac{1}{3}E\cdot\upsilon \qquad (3)$$

Ο τύπος (3) δίνει τον όγκο κώνου,πυραμίδας κ.λ.π όταν η ο-δηγός της κωνικής επιφάνειας είναι κύκλος, πολύγωνο, κ.λ.π.

6.13. ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

'Εστω Γ η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συ-νεχής στο $[\alpha,\beta]$ και έχει τύπο $y = f(x)$. Η περιστροφή της Γ γύρω από τον ά-ξονα xx' ορίζει έ-να στερεό εκ περισ-τροφής (Σχήμα 4).

Η τομή του στερε-ού αυτού με κάθε ε-πίπεδο $x = t$, $t \in [\alpha,\beta]$ ορίζει ένα κυκλικό δίσκο με ακ-τίνα $f(t)$ και εμβαδό $\pi[f(t)]^2$.



Σχ. 4

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα είναι συνεχής και η $\pi\cdot f^2(t)$ στο $[\alpha,\beta]$. Ο όγκος V του στερεού θα είναι:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi f^2(x)dx = \pi\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx$$

6.14. ΟΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Στο επίπεδο xOy θεωρούμε ένα ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και με ακτίνα ρ και του οποίου η διάμετρος βρίσ-κεται πάνω στο x'x. Αν το ημικύκλιο περιστραφεί γύρω από το x'x παράγεται σφαίρα με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ.

Ο όγκος αυτής της σφαίρας είναι

$$V = \int_{-\rho}^{\rho} \pi f^2(x)dx = \pi\int_{-\rho}^{\rho} (\sqrt{\rho^2 - x^2})^2 dx =$$

$$\pi\int_{-\rho}^{\rho}(\rho^2-x^2)dx = \pi\rho^2[x]_{-\rho}^{\rho}-\pi[\frac{x^3}{3}]_{-\rho}^{\rho} =$$

$$= \pi\rho^2(\rho+\rho)-\pi(\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^3}{3}) = 2\pi\rho^3-\frac{2\pi\rho^3}{3} =$$

$$= \frac{6\pi\rho^3-2\pi\rho^3}{3} = \frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

Σημείωση: Η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{\rho^2-x^2}$, $x \in [-\rho,\rho]$ είναι η γραφική παράσταση του ημικύκλιου.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

6.15. i) Μέθοδος αντικατάστασης
ii) Μέθοδος παραγοντική

Για την καλύτερη κατανόηση των μεθόδων βλέπετε 'Αλγεβρα 3 (Α.ΚΟΥΚΛΑΔΑ - Π. ΓΕΩΡΓΙΑΚΑΚΗ) Αόριστο ολοκλήρωμα.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_{\alpha}^{\beta}x^2dx$ β) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx$

γ) $\int_{1}^{2}\log x dx$ δ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varepsilon\varphi x dx$

ε) $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{1+x^2}$ στ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2\nu}}\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx / \nu \in N^*$

ζ) $\int_{0}^{\nu\pi}\eta\mu x dx / \nu \in N$ η) $\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta}$

Απάντηση: α) 'Εχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta}x^2dx = [\int x^2dx]_{\alpha}^{\beta} = [\frac{x^3}{3}]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^3}{3}-\frac{\alpha^3}{3} =$

$= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)$.

β) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx = [\int\eta\mu x dx]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = [-\sigma\upsilon\nu x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-(-\sigma\upsilon\nu 0) =$

$= \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

γ) $\int_{1}^{2}\log x dx = [x(\log x-1)]_{1}^{2} = 2(\log 2-1)-1(\log 1-1) =$

$= 2\log 2-2+1 = 2\log 2-1 = \log 4-1$.

δ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx = \left[-\log(\sigma\upsilon\nu x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\log\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \log\sigma\upsilon\nu 0 = -\log\frac{1}{2} +$
$+\log 1 = -\log 1 + \log 2 = \log 2.$

ε) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \left[\int \frac{x}{1+x^2}dx\right]_0^1 = \left[\log\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \log\sqrt{2} - \log\sqrt{1} =$
$= \log\sqrt{2}.$

στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2\nu}} \sigma\upsilon\nu(\nu x)dx = \left[\frac{\eta\mu\nu x}{\nu}\right]_0^{\frac{\pi}{2\nu}} = \frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\nu} - 0 = \frac{1}{\nu}$

ζ) $\int_0^{\nu\pi} \eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\nu\pi} = -\sigma\upsilon\nu\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 1 - \sigma\upsilon\nu\pi\nu,$
αν ν άρτιος, θα είναι 1-1 = 0, αν ν περιττός, θα είναι:
1-(-1) = 2.

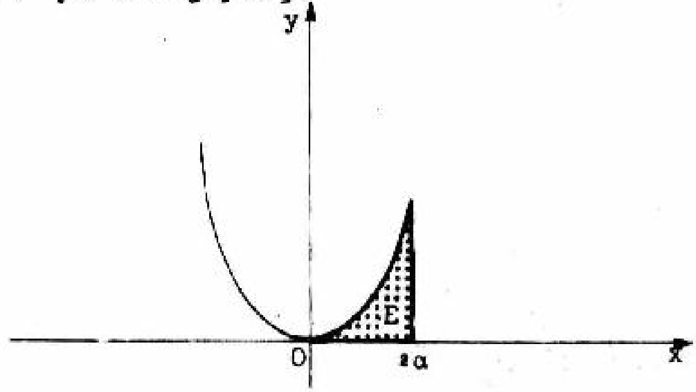
η) $\int_0^{\pi} \frac{4\eta\mu\theta d\theta}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta} = -\int_0^{\pi} \frac{d(4\sigma\upsilon\nu\theta+5)}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta} = -\frac{d(4\sigma\upsilon\nu\theta+5)}{4\sigma\upsilon\nu\theta+5}\int_0^{\pi} =$
$= -\log(5+4\sigma\upsilon\nu\theta)\int_0^{\pi} = -\log(5-4) + \log(5+4) = -\log 1 + \log 9 = \log 9.$

Θέμα 2. Υπολογίστε την τιμή του εμβαδού του χώρου Ε του επιπέδου, το οποίο περιέχεται μεταξύ της παραβολής με εξίσωση $f(x) = 3x^2$ και της ευθείας με εξίσωση $f_1(x) = 2\alpha / \alpha > 0$ (εννοείται και του άξονα των x). Σύντομα:

$f(x) = 3x^2$ με $x \in [0, 2\alpha]$.

Απάντηση:

Η τιμή του εμβαδού δίνεται από τον τύπο:



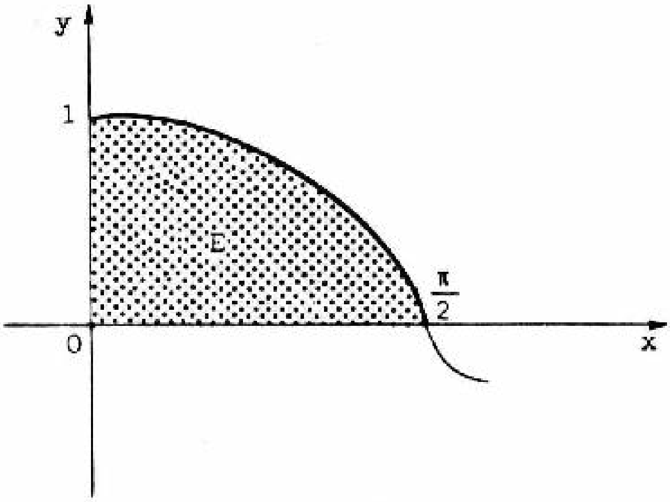
$(E) = \int_0^{2\alpha} 3x^2 dx =$

$= 3\int_0^{2\alpha} x^2 dx =$

$= 3\int_0^{2\alpha} x^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\alpha} = \left[x^3\right]_0^{2\alpha} = (2\alpha)^3 - 0^3 = 8\alpha^3.$

Θέμα 3. Όμοια για την συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ με: $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Απάντηση:



Έχουμε:

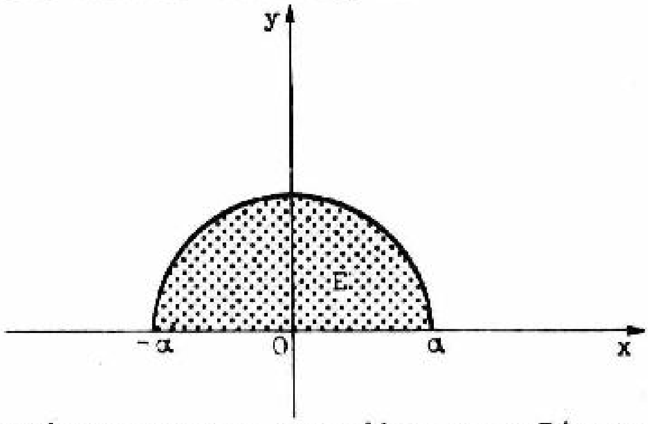
$(E) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} συνx dx =$

$= \left[\int συνx dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \left[ημx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= ημ\frac{\pi}{2} - ημ0 = 1$

Θέμα 4. Να βρεθεί το εμβαδόν κύκλου ακτίνας α.



Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2 = α^2$ με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων και ακτίνα α. Επομένως για τον υπολογισμό του χώρου (επίπεδου) E, το οποίο περιέχεται μεταξύ του διαγράμματος της καμπύλης με εξίσωση $f(x) = \sqrt{α^2-x^2}$ και με $x \in [-α,α]$ (και του άξονα των x) αρκεί να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-α}^{α}\sqrt{α^2-x^2}dx$

Δηλαδή: $(E) = \int_{-α}^{α}\sqrt{α^2-x^2}dx$

Κατ'αρχήν υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int\sqrt{α^2-x^2}dx$

Θέτουμε $x = αy$ και συνεπώς $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{α}$, δηλαδή $dx = αdy$.

Μετά από αυτό παίρνουμε:

$I = \int\sqrt{α^2-x^2}dx = \int\sqrt{α^2-α^2y^2}αdy = α^2\int\sqrt{1-y^2}dy.$

Θέτουμε τώρα $y = ημθ$, οπότε $\frac{dy}{dx} = (ημθ)' = συνθ$ και επομένως

$I = α^2\int\sqrt{1-ημ^2θ}συνθdθ = α^2\int συνθ(ημθ)'dθ = α^2(συνθημθ-$

$-\int ημθ(συνθ)'dθ) = α^2(συνθημθ+\int ημ^2θdθ) = α^2(συνθημθ+$

$+\int(1-συν^2θ)dθ) = α^2(συνθημθ+θ-\int συν^2θdθ) = α^2συνθημθ+α^2θ-I$

$2I = α^2(ημθσυνθ+θ) \Rightarrow I = α^2(\frac{ημ2θ}{4}+\frac{θ}{2}).$

Τα άκρα ολοκλήρωσης καθορίζονται τώρα όπως παρακάτω:

Είναι: $-\alpha \le x \le \alpha \iff -\alpha \le \alpha y \le \alpha \iff -1 \le y \le 1$ και επειδή $y =$ $= \eta\mu\theta \iff -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

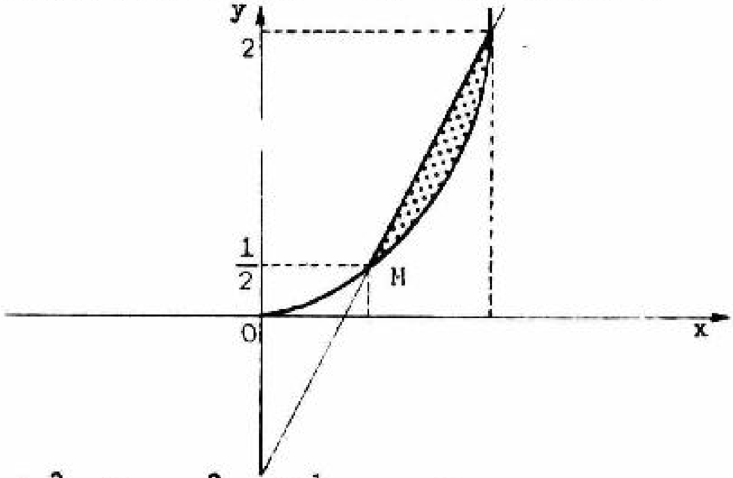
Παρατηρούμε ότι: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2\theta\,d\theta$.

Άρα: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2\theta\,d\theta = \left[\frac{\eta\mu 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, οπότε

$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx = \alpha^2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\alpha^2}{2}$ και το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\alpha^2$.

Θέμα 5. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του επιπέδου χώρου του περιεχόμενου μεταξύ των γραμμών με εξισώσεις αντίστοιχα:
$f_1(x) = 2x^2$ και $f_2(x) = 3x-1$.

Απάντηση: Οι γραμμές με εξισώσεις $f_1(x) = 2x^2$ και $f_2(x) =$ $= 3x-1$ έχουν σημεία τομής τα $M_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και $M_2(1,2)$ και $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, $f_2(x) \ge$ $\ge f_1(x)$.



θα έχουμε:

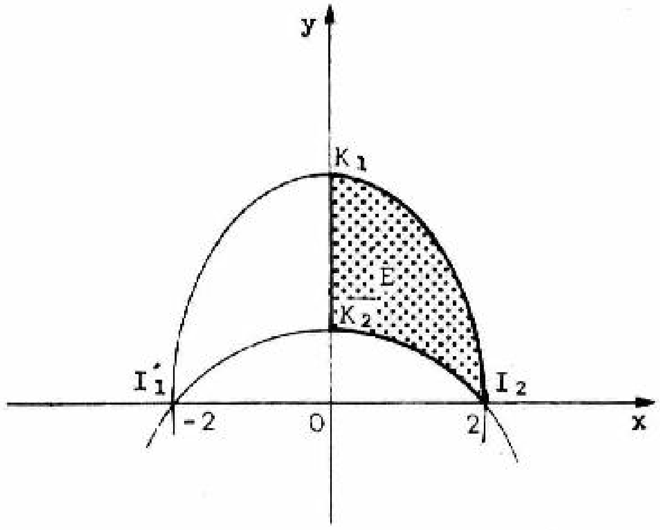
$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(3x-1-2x^2)\,dx =$

$= 3\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1}dx - 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$

$= \left(\frac{3}{2}.1^2 - 1 - \frac{2.1^3}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}.\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}.\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24}$

Θέμα 6. Θεωρούμε τις καμπύλες με εξισώσεις αντίστοιχα $f_1(x) =$ $= -x^2+4$ και $f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2+1$, οι οποίες είναι δύο παραβολές με σημεία τομής τα I_1 και I_2 με τον άξονα των x και τετμημένες αντίστοιχα $x = -2$ και $x = 2$. Εάν οι κορυφές των καμπύλων είναι κ_1 και κ_2 με τεταγμένες αντίστοιχα $y = 4$ και $y = 1$ να υπολογιστεί το εμβαδόν του επίπεδου χώρου που βρίσκεται μεταξύ των τόξων $I_1\kappa_1I_2$ και $I_1\kappa_2I_2$.

Απάντηση: Επειδή $f_1(-x) \equiv f_1(x)$ και $f_2(-x) \equiv f_2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ έπεται ότι κάθε μια από τις f_1, f_2 είναι άρτια συνάρτηση και ότι απ'αυτό έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα των y. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους, και να το διπλασιάσουμε. Επειδή για $\forall x \in [0,2]$ είναι $f_1(x) \geq f_2(x)$ θα έχουμε:



$$(E) = \int_0^2 (-x^2+4+\frac{1}{4}x^2-1)dx = \int_0^2 (-\frac{3x^2}{4}+3)dx = \int_0^2 \frac{-3x^2}{4}dx +$$
$$+\int_0^2 3dx = [-\frac{3}{4}\frac{x^3}{3}+3x]_0^2 = [-\frac{x^3}{4}+3x]_0^2 = (-\frac{8}{4}+6)-0 = 4$$

και επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι: (2E) = 8.

Θέμα 7. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

1. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά

2. Να οριστεί το εμβαδόν του επίπεδου χώρου (E) = E(λ), το οποίο περιέχεται μεταξύ του άξονα των x, της καμπύλης και των τεταγμένων δύο σημείων με τετμημένες x = 2 και x = = λ (λ >2).

Στη συνέχεια να βρεθεί το limE(λ), αν λ → +∞ .

Απάντηση: Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$- (-1,1). Παρατηρούμε ότι $f(-x) \equiv f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$- {-1,1}, και επομένως έχει ως άξονα συμμετρίας τον άξονα των y. Επομένως αρκεί να μελετηθεί στο [0,+∞) με εξαίρεση το σημείο 1 και στη συνέχεια να συμπληρωθεί με την συμμετρία ως προς τον άξονα των y.

$$H\ f'(x) = (\frac{1}{(1-x)^2})+(\frac{1}{(x+1)^2})' = -2[\frac{x-1}{(x-1)^4} + \frac{x+1}{(x+1)^4}] =$$
$$= -2\frac{(x-1)(x+1)^4+(x+1)(x-1)^4}{(x^2-1)^4} = -4\frac{x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

και στο πεδίο ορισμού της.

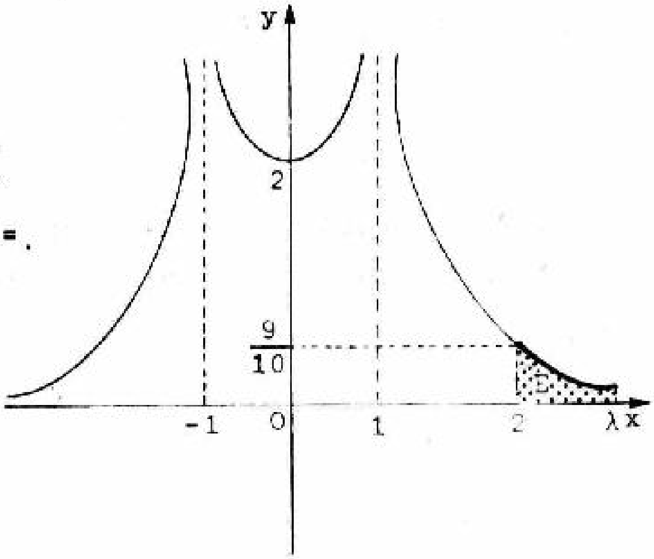
Παρατηρούμε ότι $f'(x) = 0$ αν $x = 0$ $(x \neq 1)$ και $f'(x) > 0$ για $0 < x < 1$ και $f'(x) < 0$ για $x > 1$.

Είναι δε $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		1		0
f'(x)	0	+		-	
f(x)	2	↗	+∞ | +∞	↘	0

Η γραφική παράσταση:



2. Για να υπολογίσουμε το $E(\lambda)$ παρατηρούμε ότι είναι:

$$E(\lambda) = \int_0^{\lambda}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]_2^{\lambda} = \frac{4}{3} - \frac{2\lambda}{\lambda^2-1}$$

και είναι $\underset{\lambda \to +\infty}{E(\lambda)} = \frac{4}{3}$, αφού $\frac{2\lambda}{\lambda^2-1} \to 0$.

Θέμα 8. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3-6x^2+8x$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του επίπεδου χώρου που βρίσκεται μεταξύ αυτής και του άξονα των x.

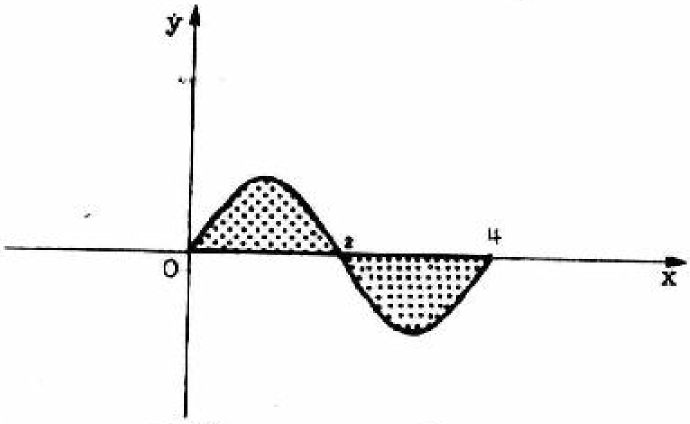
Απάντηση: Η καμπύλη τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $x = 0$ $x = 2$ και $x = 4$ και για $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm\infty$.

Παρατηρούμε ότι $f'(x) = 3x^2 = 12x+8$ και $f'(x) = 6x-12$.

Είναι $f'(x) > 0$ για $x > \frac{6+\sqrt{12}}{3}$ καθώς και με $x < \frac{6-\sqrt{12}}{3}$, ενώ είναι $f'(x) < 0$ για $\frac{6-\sqrt{12}}{3} < x < \frac{6+\sqrt{12}}{3}$

Στα σημεία $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{3}$, επειδή $f'\left(\frac{6+\sqrt{12}}{3}\right) > 0$ υπάρχει ελάχιστο και επειδή $f'\left(\frac{6-\sqrt{12}}{3}\right) < 0$ υπάρχει μέγιστο. Το σημείο $x = 2$ είναι σημείο καμπής.

Για $x > 2$ η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και για



$0<x<2$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Έχουμε συνεπώς την παρακάτω γραφική παράσταση.
Ζητάμε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους.
Θα έχουμε:

$$\int_0^2(x^3-6x^2+8x)dx-\int_2^4(x^3-6x^2+8x)dx = \left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^2-$$
$$-\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_2^4=4+4=8.$$

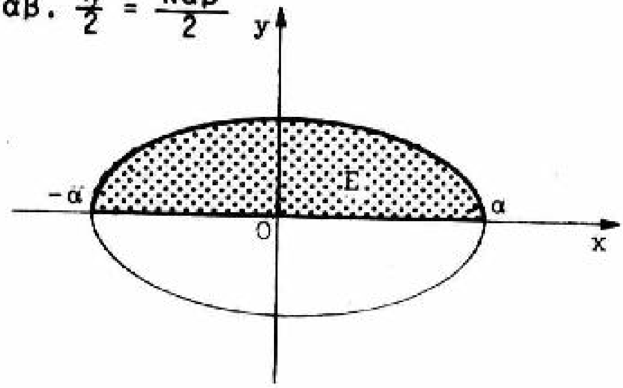
Θέμα 9. Να υπολογιστεί το εμβαδόν έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, δηλαδή με κέντρο την αρχή και ημιάξονες α,β.

Απάντηση: Θα ζητήσουμε (λόγω της υπάρχουσας συμμετρίας) να υπολογίσουμε κατ'αρχήν το εμβαδόν του χώρου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης f με

$f(x)=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,(-\alpha\le x\le\alpha)$ και του άξονα των x.

Δηλαδή: $(E)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{\beta}{\alpha}\alpha^2\sqrt{1-y^2}dy$ με $y=\alpha x$.

Θα έχουμε: $\alpha\beta\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=\alpha\beta.\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\alpha\beta}{2}$



(όπως είδαμε και στο αντίστοιχο θέμα εμβαδού κύκλου). Επομένως το εμβαδόν της έλλειψης είναι: $(E)=\pi\alpha\beta$.

Θέμα 10. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=x+1+\frac{4}{(x-1)^2}$$

1. **Να μελετηθεί και να γίνει το διάγραμμα αυτής.**
2. **Δείξετε ότι υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη Δ.**
3. **Να υπολογιστεί το εμβαδόν Ε(λ) του χώρου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης, της ασύμπτωτης Δ και των παράλληλων**

προς τον άξονα των y με τετμημένες 3 και λ (λ > 3).
4. Να βρεθεί το $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

Λύση: 1. Πεδίο ορισμού της f το $\mathbb{R}-\{1\}$. Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = 1+\frac{-8(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^4}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}-\{1\}$.

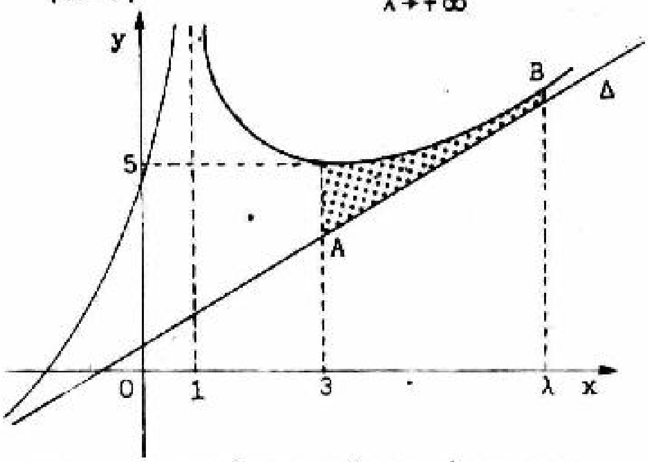
Είναι $f'(x) > 0$ για $x > 3$ ή $x < 1$ και $f'(x) < 0$ για $1 < x < 3$.

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	‖	−		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	min	↗	$+\infty$

2. Επειδή $\lim_{\lambda \to +\infty} f(x) = +\infty$ η ευθεία $x = 1$ είναι ασύμπτωτη.

Παρατηρούμε ότι $f(x)-(x+1) = \frac{4}{(x-1)^2}$ και είναι $\lim_{\lambda \to +\infty}[f(x)-x-1] = 0$ και άρα η ευθεία Δ με εξίσωση $f(x) = x+1$ είναι μια πλάγια ασύμπτωτη της f. Επειδή δε $f(x)-(x+1) > 0$ έπεται ότι η Δ βρίσκεται κάτω από το δ διαγράμματος του f. Το διάγραμμα είναι το διπλανό.



3. Για τον υπολογισμό του γραμμοσκιασμένου χώρου έχουμε:

$$E(\lambda) = \int_3^\lambda \left(x+1+\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx - 4\int_3^\lambda (x+1)\,dx = \int_3^\lambda \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= 4\left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_3^\lambda = \frac{-4}{\lambda-1} - \frac{-4}{2} = \frac{-4}{\lambda-1}+2 = \frac{2\lambda-6}{\lambda-1} \text{ και } \lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = 2.$$

Θέμα 11. Εάν η f είναι συνεχής στο $[-\theta,\theta]$ και ισχύει $f(x) = -f(-x)$ αντίστοιχα $f(x) = f(-x)$ $\forall\, x,-x \in [-\theta,\theta]$ τότε:

1. $\int_{-\theta}^{\theta} f(x)dx = 0$ αντίστοιχα 2. $\int_{-\theta}^{\theta} f(x)dx = 2\int_0^{\theta} f(x)dx$

Απάντηση: 1. Είναι $\int_{-\theta}^{\theta} f(x)dx = \int_{-\theta}^{0} f(x)dx + \int_0^{\theta} f(x)dx$.

Έστω το $\int_{-\theta}^{0} f(x)dx$ θέτουμε $x = -t$, $dx = -dt$, $f(x) = f(-t) = -f(t)$ (γιατί η f περιττή), οπότε παίρνουμε:

$\int_{-\vartheta}^{0} f(x)dx = \int_{-\vartheta}^{0} f(t)dt = \int_{-\vartheta}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{\vartheta} f(t)dt = -\int_{0}^{\vartheta} f(x)dx$

Άρα τελικά παίρνουμε:

$$\int_{-\vartheta}^{\vartheta} f(x)dx = \int_{-\vartheta}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\vartheta} f(x)dx = -\int_{0}^{\vartheta} f(x)dx + \int_{0}^{\vartheta} f(x)dx = 0$$

2. Είναι $\int_{-\vartheta}^{\vartheta} f(x)dx = \int_{-\vartheta}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\vartheta} f(x)dx$ και αν θεωρήσουμε το $\int_{-\vartheta}^{0} f(x)dx$ με $x = -t \rightarrow dx = -dt$, $f(x) = f(-t) = f(t)$, οπότε:

$\int_{-\vartheta}^{0} f(x)dx = -\int_{\vartheta}^{0} f(t)dt = -\int_{\vartheta}^{0} f(x)dx.$

Άρα τελικά παίρνουμε: $\int_{-\vartheta}^{\vartheta} f(x)dx = \int_{-\vartheta}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\vartheta} f(x)dx =$

$= -\int_{\vartheta}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\vartheta} f(x)dx = \int_{0}^{\vartheta} f(x)dx + \int_{0}^{\vartheta} f(x)dx = 2\int_{0}^{\vartheta} f(x)dx.$

Θέμα 12. Να βρεθεί το $\lim a_\nu$ με:

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}\left[1 + \text{συν}^2\frac{\pi}{\nu} + \text{συν}^2\frac{2\pi}{\nu} + \ldots + \text{συν}^2\frac{\nu-1}{\nu}\pi\right].$$

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \text{συν}^2\pi x$ με $x = 0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu}$, η οποία δίνει όλους τους όρους της $a_\nu / \nu \in \mathbb{N}$. Για $\nu \to +\infty$ ο πρώτος και τελευταίος όρος της $a_\nu / \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν στο 0 και 1 αντίστοιχα· διαμερίζουμε επομένως το διάστημα $[0,1]$ ως εξής: $\Delta_\nu = \{0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu}, 1\}$ και σχηματίζουμε το ενδιάμεσο άθροισμα:

$$\Sigma_\nu = \frac{1}{\nu}\text{συν}^2 0 + \frac{1}{\nu}\text{συν}^2\frac{\pi}{\nu} + \ldots + \text{συν}^2\frac{\nu-1}{\nu}\pi$$

Επειδή δε $\lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \text{συν}^2\pi x dx = \int_0^1 \frac{1+\text{συν}2\pi x}{2}dx =$

$= \int_0^1 \frac{dx}{2} + \int_0^1 \frac{\text{συν}2\pi x}{2}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}[\text{ημ}2\pi x]_0^1 = \frac{1}{2}.$

Θέμα 13. Θέτουμε $(1+x)^\nu = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_\nu x^\nu$ (1)

Προσδιορίστε το άθροισμα $C_0 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \ldots + \frac{1}{\nu+1}C_\nu = S$.

Απάντηση: Ολοκληρώνουμε την (1) από 0 έως 1 και παίρνουμε:

$\int_0^1 (1+x)^\nu dx = \int_0^1 (c_0 + c_1x^\nu + c_2x^2 + \ldots + c_\nu x^\nu)dx \rightarrow$

$\rightarrow \left[\frac{(1+x)^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1 = \left[c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + c_\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2^{\nu+1}-1}{\nu+1} = c_0 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{3} c_2 + \ldots + \frac{1}{\nu+1} c_\nu = S.$

Θέμα 14. Εάν $\nu \in \mathbb{N}$, δείξετε ότι: $\frac{1}{\nu+1} \int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{x}\, dx < \frac{1}{\nu}$ συμπεράνετε δε από αυτό ότι το άθροισμα $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}$ βρίσκεται μεταξύ $\log(\nu+1)$ και $\log\nu + 1$.

Απάντηση: Είναι γνωστό ότι $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\nu < x < \nu+1$, άρα: $\frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\nu}$ και βάσει της πρότασης (   ) του ορισμένου ολοκληρώματος έχουμε: $\int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{\nu+1}\, dx < \int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{x}\, dx < \int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{\nu} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{\nu+1} \int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{x}\, dx < \frac{1}{\nu+1}$ (1) και αν στην (1) θέσουμε $\nu = 1, 2, \ldots, \nu$ παίρνουμε: $\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx < \frac{1}{1}$, $\frac{1}{3} < \int_2^3 \frac{1}{x}\, dx < \frac{1}{2}$, ...,

$\frac{1}{\nu} < \int_{\nu-1}^{\nu} \frac{1}{x}\, dx < \frac{1}{\nu-1}$, $\frac{1}{\nu+1} \int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{x}\, dx < \frac{1}{\nu}$ και με πρόσθεση έχουμε: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} < \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\, dx + \ldots + \int_{\nu-1}^{\nu} \frac{1}{x}\, dx =$

$= \int_1^\nu \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_1^\nu = \log\nu - \log 1 = \log\nu.$

Όμοια παίρνουμε: $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\, dx + \ldots + \int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{x}\, dx < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}$ $\int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{x}\, dx < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} \rightarrow$

$\rightarrow [\log x]_\nu^{\nu+1} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu} \rightarrow \log(\nu+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu}$

Συνεπώς ισχύει: $\log(\nu+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu} < \log\nu + 1.$

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ.

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

1. $\int_1^9 \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}\, dx$
2. $\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + e^{2x}}\, dx$
3. $\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}\, dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) dx$
5. $\int_{-1}^1 x e^{x-|x|}\, dx$
6. $\int_0^3 \frac{\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

7. $\int_0^1 |x^2-1|dx$

8. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$

9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{x+\eta\mu x}\,dx$

10. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} x\,|\eta\mu x|\,dx$

2. Δείξετε ότι:

1. $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}$

2. $0 < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{20+x}\,dx < \frac{1}{20}$

3. $1 \le \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x}\,dx \le \frac{7}{6}$

4. $0 < \int_{\frac{1}{2}}^1 x\eta\mu x\,dx < \frac{7}{24}$

3. Δείξετε ότι $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$ ισχύει:

1. $0 < x-\log(x+1) < \frac{x^2}{2}$ 2. $\sigma\upsilon\nu x > 1-\frac{x^2}{2}$ 3. $x > \eta\mu x > x-\frac{x^3}{3!}$

4. Όμοια ότι: $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu+1}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\,dx$.

5. Αποδείξετε ότι αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$ ισχύει: $\int_0^\beta \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+\alpha+x}\,dx > 0$

και κατά συνέπεια ότι: $\log(1+\alpha)+\log(1+\beta) > \log(1+\alpha+\beta)$.

6. Όμοια αν $\alpha > 0$, $\rho > 0$ ισχύει: $\int_0^\alpha \rho(1+x)^{\rho-1}-\rho\,dx > 0$ και κατά συνέπεια δείξετε ότι: $(1+\alpha)^\rho > 1+\rho\alpha$.

7. Εάν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}^+$ και $\rho > 1$ δείξετε ότι:

$\int_\alpha^{\alpha+\beta} [(x+\gamma)^{\rho-1}-x^{\rho-1}]dt > 0$ και συμπερασματικά ότι:

$(\alpha+\beta+\gamma)^\rho+\alpha^\rho > (\alpha+\beta)^\rho+(\alpha+\gamma)^\rho$

8. Αποδείξετε ότι $\frac{1}{2}\log(\nu-1)+\frac{1}{2}\log\nu < \int_{\nu-1}^{\nu} \log x\,dx < \log\nu$ και

συμπερασματικά ότι: $0 < \log(\nu!)-\int_1^\nu \log x\,dx < \frac{1}{2}\log\nu$

9. Αποδείξετε ότι:

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} \eta\mu x\,dx = \int_0^{2\pi} \eta\mu x\,dx$ 2. $\int_0^\pi \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$

3. $2^{\nu+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^{\nu}x\, συν(\nu x)dx = \pi$

4. $\int_{-\alpha}^{\alpha} xe^{-x^2}dx = 0$

5. $e^{-1} < \int_0^1 e^{-x^2}dx < 1$

6. $\int_0^{\pi} xf(ημx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(ημx)dx$

10. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια ακολουθιών με τύπους:

1. $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{2\nu-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\nu-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2\nu-\nu^2}}$
2. $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left[(1+\frac{1}{\nu})^2 + (\alpha+\frac{2}{\nu})^2 + \ldots + (\alpha+\frac{\nu-1}{\nu})^2\right]$
3. $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \ldots + \frac{1}{2\nu}$
4. $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^2}\left[\sqrt{\nu^2} + \sqrt{\nu^2-1^2} + \ldots + \sqrt{\nu^2-(\nu-1)^2}\right]$
5. $\alpha_\nu = \frac{\nu}{(\nu+1)^2} + \frac{\nu}{(\nu+2)^2} + \ldots + \frac{\nu}{(2\nu-1)^2}$
6. $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{ημ\frac{\pi}{\nu}\, ημ\frac{2\pi}{\nu} \ldots ημ\frac{\nu\pi-\pi}{\nu}}$
7. $\alpha_\nu = \frac{1^{\kappa}+2^{\kappa}+\ldots+\nu^{\kappa}}{\nu^{\kappa+1}}, \ \kappa \in \mathbb{R}^+$
8. $\alpha_\nu = \sqrt{(1+\frac{1}{\nu^2})(1+\frac{2}{\nu^2})\ldots(1+\frac{\nu}{\nu^2})}$

11. Αν η f είναι συνεχής και είναι $f(\alpha+\beta-x) = f(x)$ δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta xf(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$

12. Αν η f είναι περιοδική περιόδου t, ισχύει:

$$\int_\alpha^{\alpha+t} f(x)dx = \int_0^t f(x)dx$$

13. Με τον ορισμό κατά Riemann να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^{\rho}}dx$

2. $\int_\alpha^\beta ημx dx$

3. $\int_\alpha^\beta συνx dx$

4. $\int_\alpha^\beta \frac{x+1}{x}dx / \alpha,\beta \neq 0$

5. $\int_\alpha^\beta \log x dx / \alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$

6. $\int_\alpha^\beta x^{\lambda}dx$

14. Να βρεθούν τα εμβαδά των χώρων των οριζομένων από τις παρακάτω καμπύλες:

1. $y = -x^2+9x-14,\ x = 3,\ x = 5,\ y = 0$
2. $y = 4x^2+2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$
3. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1,\ x^2+y^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0$
4. $y = x^3-3x^2,\ y = 0$
5. $y^2 = 4x,\ y = 2x-4$
6. $x = 8+2y^2-y^2,\ x = 0,\ y = -1,\ y = 3$
7. $y = x\sqrt{1-x},\ y = 0$
8. $y = \kappa x,\ x^2 = \kappa y,\ \kappa \in \mathbb{R}$.
9. $y^2 = 2x,\ y^2 = -2x+32$
10. $y = -x^3+2x,\ y = x$
11. $x+y = 2,\ y = x\ ,\ y = 0$
12. $y = x^3+2x,\ y = 3x^2$
13. $y^2 = 1+4x,\ y^2 = 1-2x$
14. $y^2 = 2x,\ y^2 = 4x-x^2$

15. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

1. $\int_{-1}^{1}(2x^2-x^3)dx$
2. $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$
3. $\int_{-2}^{3} e^{-\frac{x}{2}}dx$
4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \eta\mu x dx$
5. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-9}$
6. $\int_{1}^{\rho}\log x dx$
7. $\int_{6}^{2}(x^3+1)x^2 dx$
8. $\int_{0}^{\alpha}\sqrt{a^2-x^2}dx$
9. $\int_{1-}^{1}x^2\sqrt{x^2-x^2}dx$
10. $\int_{0}^{\sqrt{2}}x^3 e^{x^2}dx$

16. Δείξετε ότι:

1. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\eta\mu 2x dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$
2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\eta\mu x dx = \pi-2$
3. $\int^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta d\theta = \frac{\nu-1}{\nu} \int^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\theta d\theta \rightarrow I_{\nu} = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$
4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{\nu}\theta d\theta = \frac{\nu-1}{\nu} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu-2}\theta d\theta \rightarrow I_{\nu} = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$

Είναι δε $I_0 = I_0' = \frac{\pi}{2}$ και $I_1 = I_1' = 1$.

Βάσει αυτών δείξετε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^{2\rho}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^{2\rho}\theta d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2\rho-1}{2\rho}\cdot\frac{\pi}{2} \ /\rho\in\mathbb{N}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^{2\rho+1}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^{2\rho+1}\theta d\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2\rho}{2\rho+1} \ /\rho\in\mathbb{N}$$

17. Θέτουμε $I_{\mu,\nu} = \int ημ^{\mu}\theta συν^{\nu}\theta d\theta$ με $\mu,\nu\in\mathbb{N}$. Δείξετε ότι:

$$I_{\mu,\nu} = \frac{ημ^{\mu+1}\theta συν^{\nu-1}\theta}{\mu+1} + \frac{\nu-1}{\mu+1} I_{\mu+2,\nu-2} \text{ και}$$

$$I_{\mu,\nu} = \frac{ημ^{\mu+1}\theta συν^{\nu-1}\theta}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+\nu} I_{\mu,\nu-2} \text{ και}$$

$$I_{\mu,\nu} = \frac{ημ^{\mu-1}\theta συν^{\nu-1}\theta}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+1} I_{\mu-2,\nu}$$

και από αυτά ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^{\mu}\theta συν^{\nu}\theta d\theta = \frac{\nu-1}{\mu+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^{\mu}\theta συν^{\nu-2}\theta d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^{\mu}\theta συν^{\nu}\theta d\theta = \frac{\mu-1}{\mu+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^{\mu-2}\theta συν^{\nu}\theta d\theta$$

18. Εάν $I_\nu = \int_0^{\theta} \frac{ημ(2\nu-1)\theta}{ημ\theta} d\theta / \nu\in\mathbb{N}$, δείξετε ότι $I_\nu - I_{\nu-1} = 0$

και ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ημ(2\nu-1)\theta}{ημ\theta} = \frac{\pi}{2}$ και $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ημ^2\nu\theta}{ημ^2\theta} = \frac{\nu\pi}{2}$

19. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χώρου που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης με εξίσωση $y = 4x-x^2$ και του άξονα των x.

20. Όμοια για την καμπύλη με εξίσωση $y = x^2-3x+2$ και για τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = \frac{3}{2}$.

21. Όμοια για την καμπύλη με εξίσωση $y = x^3+6x^2-7x$ και του άξονα των x.

22. Ποιό το εμβαδόν του χώρου του μεταξύ της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας $y = 2x-4$.

23. Ποιό το εμβαδόν του χώρου που βρίσκεται μεταξύ των δύο παραβολών $y = 6x-x^2$ και $y = x^2-2x$.

24. Ποιό το εμβαδόν που περικλείεται (εσωτερικά) της γραμμής με εξίσωση $y^2 = x^2 - x^4$.

25. Να βρεθεί το εμβαδόν του μικρότερου χώρου που βρίσκεται μεταξύ του κύκλου $x^2+y^2 = 25$ και της ευθείας $x = 3$.

26. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = συν^2x - συνx/x =$ = rad.

1. Να δειχτεί ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π.
2. Να βρεθεί η παράγωγος αυτής
3. Να μελετηθεί η f και να γίνει γραφική παράσταση αυτής, μεταξύ 0 και π.
4. Να κατασκευαστεί η εφαπτόμενη στο σημείο τετμημένης $x = \frac{\pi}{2}$.
5. Δείξετε ότι έχουμε αμέσως και το διάγραμμα της f στο $-\pi \leq x \leq 0$, και ακολούθως και για x τυχαία.
6. Να υπολογιστεί το (Ε) του χώρου του μεταξύ του άξονα των x και των παράλληλων προς τον άξονα των y από τα σημεία με τετμημένες $x = \frac{\pi}{2}$ και $x = \pi$.
7. Όμοια να υπολογιστεί ο χώρος Ε΄ ο μεταξύ του άξονα των x του διαγράμματος της f και των τεταγμένων στα σημεία με τετμημένες $x = 0$ και $x = \pi$.

27. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

1. Να μελετηθεί και να γίνει το διάγραμμα αυτής.
2. Να υπολογιστεί το (Ε) του χώρου που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x, του άξονα των y, της ευθείας με εξίσωση $x = -1$ και του διαγράμματος της f.

28. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω ολοκληρωμάτων:

α. $\int_0^x (1+t+t^2)dt$ δ. $\int_{-\pi}^x \left|\frac{1}{2}+συνt\right|dt$ στο $[0,\pi]$

β. $\int_0^{\sqrt{x}} \log(t^2)dt$ ε. $\int_1^{1-x}(1-2t+3t^2)dt$

γ. $\int_{-2}^x t^2(t^2+1)dt$ στ. $\int_{-1}^{2x}(1+t+t^2)dt$

29. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες: $\int_0^x (t^3-t)dt = \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^x (t-t^3)dx$

30. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και f(x) ≥ 0, δείξετε ότι

$$H_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f^\nu(x)dx}$$

και συμπερασματικά ότι $\lim_{\nu\to+\infty} H_\nu = \max f(x)/x \in [\alpha,\beta]$, $\lim_{\nu\to+\infty} H_\nu =$ $= \min f(x)/x \in |\alpha,\beta|$

31. Αν ν∈N, δείξετε ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}2\nu x \log \text{στεμ}x dx = \frac{\pi}{4\nu}$

32. Θέτουμε από τον ορισμό $\log_e x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ ∀ x∈R^+ αποδείξετε τότε τις ...οτητες του λογαρίθμου.

33. Εάν $f(\nu) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφ}^\nu x dx, \nu \geq 1$, δείξετε ότι:

α) $f(\nu+1) < f(\nu)$

β) $f(\nu)+f(\nu-2) = \frac{1}{\nu-1}$, $\nu \geq 3$.

γ) $\frac{1}{\nu+1} < 2f(\nu)$ $\frac{1}{\nu-1}$, $\nu > 3$

34. Εάν f(π) = 2 και $\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\text{ημ}x dx = 5$, τότε να υπολογιστεί το f(0).

35. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα x'x.

36. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα x'x του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $y = 4x^2$, $x^2+y^2 = 4$.

37. Δίνεται η συνάρτηση f: [0,3] →R με τύπο y = 4x.
Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται αν η γραφική της f περιστραφεί γύρω από τον άξονα x'x.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική:

Π.Γεωργιακάκης - Α.Κουκλάδας
Σ. Κανέλλος & Α. Πάλλας
Β. Σαβαΐδης & Γ. Παντελίδης
Θ. Μαμούρη & Κ. Τσιλικούδη
Παχή - Τσιράκη
Ευκλείδης Ε.Μ.Ε.
Π. Μάγειρας
Θ. Καζαντζής
Π. Μεντεκίδης
Λάμπρου - Πέππας
Ευσταθόπουλος - Ποσταντζής

Ξένη:

Γ. ΚΟΡΗ - Τ. ΚΟΡΗ
Ρ.Α. ΚΑΛΗΝΗ.
VIOREL HIRIS
RG.D Allen
S: Straszewicz
Joseph Blakey
Alef
L. Chambadal
Danko - Popoy
C. Plumpton
F. GeRRISH
G.H. HARRY
G. CAGNAC - L. THIBERGE
E. COSSAPT - P. THERON
R.I. PORTER & D. SHOTTON
C. PLYMPTON & A. LENTIN
A.T. STARR & J. COMMEAY
WALKER & POLYA
M.SPIVAK & HILLE
V. LIDSKY & N.D. ANTONOW
C. CHRYSTAL & G.F. SIMMONS
Π.C. ΜΟΔΕΗΟΒ.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Παραγωγοι

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΚΥΚΛΟΣ & ΑΡΚΑΔΙ"
Μαυροκορδάτου 3 τηλ. 36.36.063
10678 ΑΘΗΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ '85

ΒΙΒΛΙΑ ΠΟΛ. & ΜΑΝ. ΓΕΩΡΓΙΑΚΑΚΗ

ΑΛΓΕΒΡΑ . . .	1	Μαθηματικά **4ης Δέσμης** . . . .
"	2	Μιγαδικοί αριθμοί (Μεθοδολογία) . . . .
"	3	Ορίζουσες - Πίνακες - Γραμμικά συστήματα. . . .
"	4	Στατιστική - Συνδυαστική - Πιθανότητες. . . . .
"	5	Αλγεβρικές δομές (Μεθοδολογία). . . . .
"	6Α	Συναρτήσεις . . . .
"	6Β	Συναρτήσεις (Σύγκλιση - Συνέχεια) . . . .
"	6Γ	Παράγωγοι - Ολοκληρώματα . . . .
"	7	Ακολουθίες (Μεθοδολογία). . . . .
"	8	Ειδικά θέματα 1ης Δέσμης (Διαν. χώροι, κ.λ.π) .
"	9	Λυμ.Ασκήσεις (Δομές-Πολ/μα-Μιγαδικοί-Θ.Αριθμών)
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ		Διανυσματικη Γ' Λυκείου . . . .
"		Αναλυτική Γ' Λυκείου. . . . .
"		Μεθοδολογία Β' Λυκείου. . . . .
"		Μεθοδολογία Α' Λυκείου (υπό έκδοση) . . . . . .
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ		**Ν.ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΥ-Π.ΓΕΩΡΓΙΑΚΑΚΗ** Β' Λυκείου . . . .
ΑΛΓΕΒΡΑ	1	**ΚΟΥΚΛΑΔΑ-ΓΕΩΡΓΙΑΚΑΚΗ** (ακολουθίες) . . . .
"	2	" " (Πρόοδοι,Σειρές,Σύγκλ.,Συνέχεια)
"	3	" " (Παράγωγοι-Ολοκληρώματα) . . . .
" ΜΕΘΟΔ.	2	" " (Απόλυτα-Μιγαδικοί). . . . . . .
ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΚΡΗΤΗΣ		**ΨΙΛΑΚΗ Μεταγλωτισμένη 4 Τόμοι** . . . .
ΕΚΘΕΣΕΙΣ		**ΤΖΑΝΟΥΔΑΚΗ-ΕΓΓΛΕΖΑΚΗ** Β'& Γ' Λυκείου . . . . . .
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ		**Χ. ΣΤΕΛΛΑ** Βοήθημα Α', Β', Γ' Γυμνασίου. . .